Hamid Najib

CPGE
Écoles
d'ingénieurs

Exercices et problèmes résolus d'optique

avec rappels de cours et QCM

ellipses

CHAPITRE 1

DIOPTRE MIROIR PRISME FIBRE OPTIQUE

1.1 Indice de réfraction absolu

L'indice absolu d'un milieu homogène, transparent et isotrope (MHTI) s'écrit :

$$n = \frac{c}{v}$$

v : la vitesse de l'onde lumineuse dans le milieu ;
c : la vitesse de la lumière dans le vide.

1.2 Chemin optique

La grandeur :

$$L = \int n d\ell$$

homogène à une distance, est appelée chemin optique entre deux points M et M' du MHTI atteints par la lumière.
Dans un MHTI ($n = Cste$), la trajectoire est rectiligne. Le chemin optique est écrit entre parenthèses $L =$ (MM').

1.3 Principe de Fermat - Rayon lumineux

Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point M à un point M' dans un milieu d'indice n est celui pour lequel le chemin optique est extrémal.
Dans un MHTI, le chemin optique est minimal ; la lumière se propage donc en ligne droite suivant des rayons lumineux indépendants les uns des autres.

1.4 Lois de Snell-Descartes

Ce sont quatre lois établies empiriquement. On peut les retrouver en appliquant le principe de Fermat.

Lois de réfraction

Considérons un dioptre séparant deux milieux d'indices n et n'.

- **Première loi de réfraction**
  Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface sont dans le plan d'incidence.
- **Seconde loi de réfraction**
  L'angle d'incidence i et l'angle de réfraction i' vérifient l'invariant suivant : $nsini = n'sini'$

Lois de réflexion

On considère dans ce cas un miroir.

- **Première loi de réflexion**

  Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale à la surface sont dans le plan d'incidence.

- **Seconde loi de réflexion**

  L'angle d'incidence i et l'angle de réflexion r sont égaux et de signes contraires : i = -r

1.5 Angle de réfraction limite

La seconde loi de réfraction : $nsini = n'sini'$ permet de montrer que :
si n' > n et $i = \pi/2$ (incidence rasante), l'angle de réfraction est égal à :

$$i' = r_\ell = arcsin(n/n')$$

r_ℓ est appelé angle de réfraction limite.

1.6 Angle d'incidence critique

Si n' < n et $i' = \pi/2$, l'angle d'incidence est inférieur ou égal à l'angle :

$$i_c = arcsin(n'/n)$$

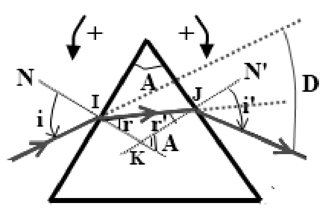
appelé angle critique d'incidence.

1.7 Réflexion totale

Dans le cas où $n' < n$, il y a réfraction si l'angle d'incidence est $i \leq i_c$.
Si l'angle d'incidence est choisi supérieur à i_c, il n'y aura pas de réfraction, mais une réflexion dite réflexion totale, aucun rayon n'est réfracté.

1.8 Formules du prisme

Le prisme est un milieu d'indice n, plongé dans l'air, limité par deux dioptres plans non parallèles.



A : angle du prisme ; i : angle d'incidence
r et r' : angles de réfraction
i' : angle d'émergence ; D : déviation totale

Les formules du prisme sont :

$$sini = nsinr$$

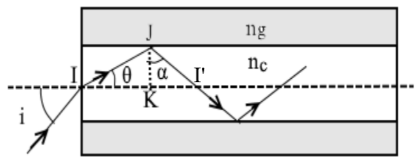
$$sini' = nsinr'$$

$$A = r + r'$$

$$D = i - r + i' - r' = i + i' - A$$

1.9 Fibre optique

Une fibre optique est un guide diélectrique permettant de transmettre des informations ou conduire la lumière sur une grande distance.



La valeur maximale de l'angle i pour que la lumière puisse être guidée dans la fibre sans perte est donnée par la relation suivante ;

$$sini_{max} = arcsin(\sqrt{n_c^2 - n_g^2})$$

n_c : indice du cœur de la fibre
n_g : indice de la gaine qui entoure le cœur

1.10 EXERCICES RESOLUS 1

Exercice 1.1 : Lois de réfraction et de réflexion

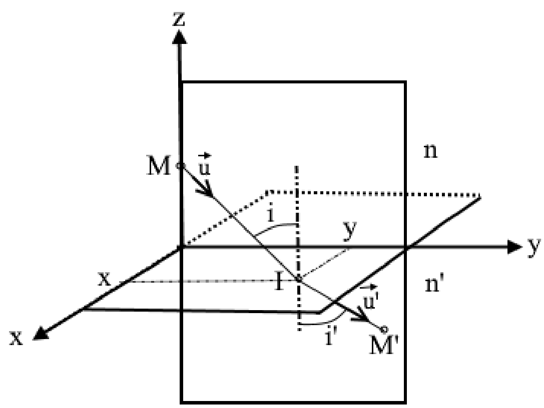
1) Un rayon lumineux incident issu du point M(0, 0, z_M), $z_M > 0$, tombe sur un dioptre (plan xOy), séparant les milieux d'indices n ($z > 0$) et n' ($z < 0$), au point I(x, y, 0) et émerge vers le point M'(0, $y_{M'}$, $z_{M'}$), $y_{M'} > 0$, $z_{M'} < 0$; M et M' sont supposés fixes.

a- Calculer le chemin optique $L = (MM')$.

b- Appliquer le principe de Fermat et retrouver les deux lois de réfraction de Snell-Descartes.

2) On considère maintenant un miroir plan confondu avec le plan xOy. Un rayon lumineux incident issu du point M$(0, 0, z_M)$, $z_M > 0$, tombe sur le miroir au point I$(x, y, 0)$ et est réfléchi vers le point M'$(0, y_{M'}, z_{M'})$, $y_{M'} > 0$, $z_{M'} > 0$; M et M' sont supposés fixes. Appliquer le principe de Fermat et retrouver la seconde loi de réflexion de Snell-Descartes.

1) a- Le chemin optique entre M et M' s'écrit :



$$L = (MM') = (MI) + (IM') = n\overrightarrow{MI}.\vec{u} + n'\overrightarrow{IM'}.\vec{u'}$$

$$L = n\overline{MI}cos(\overrightarrow{MI}, \vec{u}) + n'\overline{IM'}cos(\overrightarrow{IM'}, \vec{u'}) = n\overline{MI} + n'\overline{IM'}$$

b- D'après le principe de Fermat, le chemin entre M et M' est constant, quel que soit le trajet suivi, ou quel que soit le point I de coordonnées $(x, y, 0)$.

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy = 0$$

Soit si :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Or :

$$L = n\sqrt{x^2 + y^2 + z_M^2} + n'\sqrt{x^2 + (y_{M'} - y)^2 + z_{M'}^2}$$

D'où :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = n\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_M^2}} + n'\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y_{M'} - y)^2 + z_{M'}^2}}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial y} = n\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_M^2}} - n'\frac{y_{M'} - y}{\sqrt{x^2 + (y_{M'} - y)^2 + z_{M'}^2}}$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ donne $x = 0$; I est donc dans le plan yOz. D'où la première loi de réfraction :

«Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface de séparation sont dans le plan d'incidence».

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ donne :

$$n\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_M^2}} = n'\frac{y_{M'} - y}{\sqrt{x^2 + (y_{M'} - y)^2 + z_{M'}^2}}$$

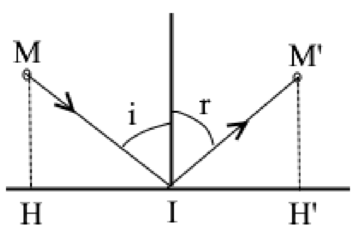
D'après la figure et puisque $x = 0$:

$$sini = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_M^2}} \text{ et } sini' = \frac{y_{M'} - y}{\sqrt{(y_{M'} - y)^2 + z_{M'}^2}}$$

On obtient la seconde loi de réfraction :

$$nsini = n'sini'$$

2) D'après la figure suivante :



le chemin optique entre M et M' s'écrit :

$$L = (MIM') = (MI) + (IM')$$

Or :

$$sini = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_M}}$$

$$sinr = \frac{y'_M - y}{\sqrt{(y'_M - y)^2 + z'_M}}$$

D'où :

$$sini = sinr$$

Compte tenu des sens d'orientation des angles, on en déduit : r = -i

Exercice 1.2 : Loi de Gladstone

On considère un repère xOy dont l'axe Ox est parallèle au sol et l'axe Oy est orienté selon l'altitude.

1) On donne la loi de Gladstone :

$$n - 1 = \alpha \frac{m}{V}$$

n est l'indice de réfraction d'une masse m d'air contenue dans un volume $V = V_0(1 + \beta\theta)$ à la température θ : V_0 étant le volume à $0°\ C$; α et β sont des constantes.
Comment varie l'indice de l'air lorsque le rayon lumineux provenant du soleil s'approche du sol ?

2) Sachant que l'indice de l'air varie avec l'altitude selon la loi suivante :

$$y = an^2 + b$$

a et b étant des constantes, déterminer la trajectoire décrite par ce rayon lumineux ? Conclure.

1) Comme la température augmente lorsque le rayon lumineux s'approche du sol, l'indice de l'air diminue.

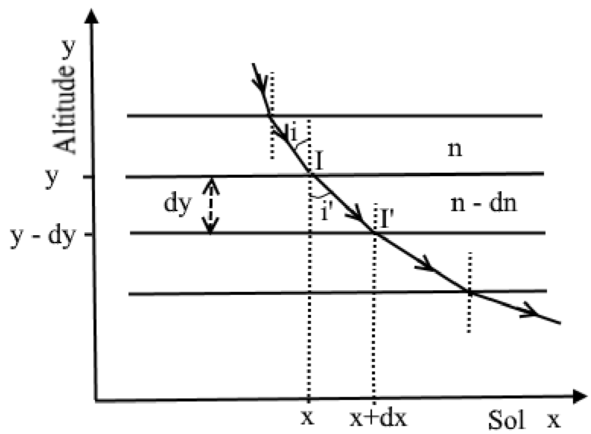
2) Considérons une partie de l'air divisée en petites tranches.
La loi de réfraction en I s'écrit :

$$nsini = (n - dn)sini' = Cste$$

Étudions la variation de y en fonction de x.

$$y = an^2 + b$$

$$\frac{dy}{dn} = 2an; \ \frac{dn}{di} = -\frac{n}{tgi} \ ; \frac{dy}{di} = -2\frac{an^2}{tgi}$$



Or :

$$tg(i + di) \approx tgi \approx -\frac{dx}{dy}$$

D'où :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{tgi}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2an^2 sin^2 i} = Cste$$

Soit :

$$\frac{dy}{dx} = Cx + B$$

On en déduit l'équation de la trajectoire décrite par le rayon lumineux :

$$y = \frac{C}{2}x^2 + Bx + D$$

C, B et D sont des constantes.

La trajectoire est parabolique d'axe vertical tournant sa concavité vers le haut. On conclut que dans un milieu non homogène, la lumière ne se propage pas en ligne droite. C'est l'exemple du phénomène de mirage