

Jean-Marc Garnier

Les mathématiques du CAPES

CAPES

Écrit et oral

2^e édition



ellipses

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | BASES MATHÉMATIQUES | 23 |
| 1.1 | Rappels des règles de logique | 24 |
| 1.2 | Théorie des ensembles | 25 |
| 1.2.1 | Notion d'ensemble | 25 |
| 1.2.2 | Quantificateurs | 27 |
| 1.2.3 | Axiomes de la théorie des ensembles | 28 |
| 1.3 | Raisonnements usuels | 28 |
| 1.4 | Relation | 31 |
| 1.4.1 | Relations binaires | 31 |
| 1.4.2 | Relations d'équivalence | 32 |
| 1.4.3 | Relations d'ordre | 33 |
| 1.5 | Application | 35 |
| 1.5.1 | Définition | 35 |
| 1.5.2 | Égalité et restriction | 36 |
| 1.5.3 | Image et image réciproque | 36 |
| 1.5.4 | Composition d'applications | 37 |
| 1.5.5 | Injection, surjection, bijection | 37 |
| 1.5.6 | Application réciproque d'une bijection | 39 |
| 1.5.7 | Ensembles équipotents | 40 |
| 1.6 | Lois de composition interne | 40 |
| 1.6.1 | Définition | 40 |
| 1.6.2 | Propriétés | 42 |
| 1.6.3 | Morphismes | 43 |
| 1.6.4 | Propriétés | 43 |
| 1.6.5 | Isomorphisme | 44 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.7 | Groupes | 44 |
| 1.7.1 | Définition | 44 |
| 1.7.2 | Morphisme de groupes | 47 |
| 1.7.3 | Sous-groupes | 49 |
| 1.7.4 | Ordre d'un élément d'un groupe | 52 |
| 1.7.5 | Système générateur d'un groupe | 53 |
| 1.7.6 | Groupes symétriques | 54 |
| 1.8 | Anneaux | 56 |
| 1.8.1 | Définition | 56 |
| 1.8.2 | Anneau totalement ordonné | 59 |
| 1.8.3 | Anneau intègre | 59 |
| 1.8.4 | Morphisme d'anneaux | 59 |
| 1.8.5 | Sous-anneaux | 61 |
| 1.8.6 | Idéaux | 61 |
| 1.8.7 | Anneau quotient | 62 |
| 1.9 | Corps | 63 |
| 1.9.1 | Définition | 63 |
| 1.9.2 | Corps totalement ordonné | 64 |
| 1.9.3 | Morphisme de corps | 64 |
| 1.9.4 | Sous-corps | 65 |
| 1.10 | Espaces vectoriels | 65 |
| 1.10.1 | Définition | 65 |
| 1.10.2 | Propriétés | 66 |
| 1.10.3 | Sous-espaces vectoriels | 67 |
| 1.10.4 | Applications linéaires | 67 |
| 1.10.5 | Anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel | 69 |
| 1.10.6 | Groupe linéaire | 69 |
| 1.11 | Interprétation de ce chapitre | 70 |
| 2 | ENSEMBLE DE NOMBRES | 71 |
| 2.1 | Ensemble des entiers naturels | 71 |
| 2.1.1 | Définition axiomatique de \mathbb{N} | 71 |
| 2.1.2 | Conséquences des axiomes | 72 |
| 2.1.3 | Raisonnement par récurrence | 73 |
| 2.1.4 | Ensembles finis | 74 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 2.1.5 | Ensemble dénombrable | 76 |
| 2.1.6 | Multiplication dans \mathbb{N} | 77 |
| 2.1.7 | Division euclidienne | 79 |
| 2.1.8 | Système de numération | 80 |
| 2.1.9 | Complément | 81 |
| 2.2 | Ensemble des entiers relatifs | 84 |
| 2.2.1 | Ensemble \mathbb{Z} | 85 |
| 2.2.2 | Groupe $(\mathbb{Z}, +)$ | 85 |
| 2.2.3 | Immersion de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} | 86 |
| 2.2.4 | Anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ | 87 |
| 2.2.5 | Anneau $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ | 88 |
| 2.2.6 | Division euclidienne dans \mathbb{Z} | 90 |
| 2.2.7 | Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ | 90 |
| 2.2.8 | Idéaux de \mathbb{Z} | 91 |
| 2.2.9 | Dénombrabilité de \mathbb{Z} | 91 |
| 2.3 | Ensemble des rationnels | 92 |
| 2.3.1 | Ensemble \mathbb{Q} | 92 |
| 2.3.2 | Groupe $(\mathbb{Q}, +)$ | 92 |
| 2.3.3 | Corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$ | 93 |
| 2.3.4 | Immersion de \mathbb{Z} dans \mathbb{Q} | 94 |
| 2.3.5 | Corps $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ | 96 |
| 2.3.6 | Nombres décimaux | 97 |
| 2.3.7 | Corps des fractions | 97 |
| 2.3.8 | Dénombrabilité de \mathbb{Q} | 98 |
| 2.4 | Corps des nombres réels | 99 |
| 2.4.1 | Insuffisance de \mathbb{Q} | 99 |
| 2.4.2 | Suite de Cauchy | 100 |
| 2.4.3 | Définition | 100 |
| 2.4.4 | Non complétude de \mathbb{Q} | 102 |
| 2.4.5 | Définition axiomatique de \mathbb{R} | 102 |
| 2.4.6 | Développements décimaux | 103 |
| 2.4.7 | Non-dénombrabilité de \mathbb{R} | 110 |
| 2.4.8 | Racine d'un nombre réel | 110 |
| 2.4.9 | Trinôme du second degré | 111 |
| 2.5 | Ensemble des nombres complexes | 113 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.5.1 | Construction de \mathbf{C} | 113 |
| 2.5.2 | Propriétés de \mathbf{C} | 116 |
| 2.5.3 | Structure euclidienne de \mathbf{C} | 119 |
| 2.5.4 | Forme trigonométrique | 120 |
| 2.5.5 | Forme exponentielle d'un nombre complexe | 126 |
| 2.5.6 | Applications de la forme exponentielle | 127 |
| 2.5.7 | Équation du second degré dans \mathbf{C} | 131 |
| 2.5.8 | Racines énièmes dans \mathbf{C} | 132 |
| 2.5.9 | Groupes (\mathbf{U}, \times) et (\mathbf{U}_n, \times) | 133 |
| 2.5.10 | Utilisation des nombres complexes en géométrie | 133 |
| 2.5.11 | Pentagone régulier convexe | 137 |
| 3 | POLYNÔMES | 139 |
| 3.1 | Anneau des polynômes | 139 |
| 3.1.1 | Première définition | 139 |
| 3.1.2 | Deuxième définition | 145 |
| 3.1.3 | Comparaison de ces deux définitions | 147 |
| 3.2 | Formule de Taylor pour les polynômes | 148 |
| 3.3 | Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ | 149 |
| 3.4 | Racines d'un polynôme | 150 |
| 3.5 | Division suivant les puissances croissantes | 153 |
| 3.6 | Décomposition dans $\mathbf{K}[X]$ | 155 |
| 3.6.1 | Polynômes irréductibles | 155 |
| 3.6.2 | Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ | 155 |
| 3.6.3 | Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ | 158 |
| 3.7 | Anneau principal $\mathbf{K}[X]$ | 161 |
| 4 | ARITHMÉTIQUE DANS LES ANNEAUX PRINCIPAUX | 163 |
| 4.1 | Congruence | 164 |
| 4.2 | Groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ | 165 |
| 4.3 | Anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$ | 166 |
| 4.3.1 | Première construction de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | 166 |
| 4.3.2 | Deuxième construction de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | 168 |
| 4.4 | Pgcd et nombres premiers entre eux | 168 |
| 4.4.1 | Pgcd | 168 |
| 4.4.2 | Nombres premiers entre eux | 169 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 4.4.3 | Propriétés du pgcd | 170 |
| 4.4.4 | Théorème de Gauss | 171 |
| 4.4.5 | Algorithme d'Euclide | 172 |
| 4.5 | Ppcm | 173 |
| 4.5.1 | Intersection de deux sous-groupes de \mathbf{Z} | 173 |
| 4.5.2 | Propriétés du ppcm | 173 |
| 4.6 | Nombres premiers | 175 |
| 4.6.1 | Définition | 175 |
| 4.6.2 | Propriétés des nombres premiers | 176 |
| 4.6.3 | Nombres premiers et divisibilité | 176 |
| 4.6.4 | Factorisation en produit de nombres premiers | 177 |
| 4.7 | Complément sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | 180 |
| 4.7.1 | Éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | 180 |
| 4.7.2 | Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | 180 |
| 4.7.3 | Corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ | 181 |
| 4.8 | Groupes monogènes, groupes cycliques | 182 |
| 4.8.1 | Groupes cycliques | 182 |
| 4.8.2 | Décomposition des groupes cycliques | 184 |
| 4.8.3 | Anneaux $\mathbf{Z}/nn'\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ | 185 |
| 4.8.4 | Indicateur d'Euler | 186 |
| 4.9 | Théorèmes classiques de l'arithmétique | 188 |
| 4.9.1 | Théorème d'Euler | 188 |
| 4.9.2 | Petit théorème de Fermat | 189 |
| 4.9.3 | Théorème de Wilson | 190 |
| 4.9.4 | Théorème des restes chinois | 190 |
| 4.10 | Arithmétique dans un anneau principal | 191 |
| 4.10.1 | Divisibilité et inclusion des idéaux | 192 |
| 4.10.2 | Pgcd dans un anneau principal | 192 |
| 4.10.3 | Éléments premiers entre eux | 194 |
| 4.10.4 | Propriétés du pgcd | 195 |
| 4.10.5 | Théorème de Gauss | 197 |
| 4.10.6 | Algorithme d'Euclide | 198 |
| 4.10.7 | Ppcm dans un anneau principal | 200 |
| 4.11 | Éléments extrémaux | 202 |
| 4.11.1 | Définition | 202 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.1.1.2 | Polynômes irréductibles et divisibilité | 203 |
| 4.12 | Complément sur $\mathbf{Z}[i]$ | 206 |
| 5 | SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES | 207 |
| 5.1 | Suites numériques | 207 |
| 5.1.1 | Généralités | 207 |
| 5.1.2 | Suites convergentes | 208 |
| 5.1.3 | Propriétés des suites convergentes | 209 |
| 5.1.4 | Propriétés algébriques des suites | 211 |
| 5.1.5 | Limites infinies | 213 |
| 5.1.6 | Théorème fondamentaux sur les suites numériques | 215 |
| 5.1.7 | Récurrence simple | 218 |
| 5.1.8 | Récurrence double | 220 |
| 5.1.9 | Suites homographiques | 224 |
| 5.1.10 | Algorithme de Babylone | 225 |
| 5.1.11 | Méthode de Newton | 227 |
| 5.1.12 | Utilisation de l'inégalité des accroissements finis | 233 |
| 5.2 | Généralités sur les séries | 234 |
| 5.2.1 | Définition | 234 |
| 5.2.2 | Critère de Cauchy | 236 |
| 5.2.3 | Séries absolument convergentes | 236 |
| 5.3 | Critères de convergence des séries numériques | 238 |
| 5.3.1 | Critère 1 | 238 |
| 5.3.2 | Critère 2 | 238 |
| 5.3.3 | Critère 3 | 239 |
| 5.3.4 | Critère 4 | 240 |
| 5.3.5 | Critère 5 | 243 |
| 5.4 | Séries numériques particulières | 246 |
| 5.4.1 | Règle de Raabe et Duhamel | 246 |
| 5.4.2 | Transformation d'Abel | 247 |
| 6 | FONCTIONS NUMÉRIQUES | 249 |
| 6.1 | Limites | 249 |
| 6.1.1 | Adhérence d'un intervalle | 249 |
| 6.1.2 | Limite d'une fonction | 250 |
| 6.1.3 | Propriétés des fonctions admettant une limite | 252 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 6.1.4 | Propriétés algébriques des limites | 254 |
| 6.1.5 | Limites infinies | 257 |
| 6.2 | Fonctions continues | 257 |
| 6.2.1 | Définition | 257 |
| 6.2.2 | Propriétés | 258 |
| 6.3 | Théorèmes fondamentaux sur la continuité | 259 |
| 6.3.1 | Théorèmes de Bolzano-Weierstrass et de Heine | 259 |
| 6.3.2 | Image d'un intervalle | 261 |
| 6.3.3 | Théorème des valeurs intermédiaires | 262 |
| 6.3.4 | Image d'un intervalle | 263 |
| 6.3.5 | Image d'un intervalle fermé borné | 264 |
| 6.3.6 | Continuité et monotonie | 264 |
| 6.4 | Dérivation | 267 |
| 6.4.1 | Définition | 267 |
| 6.4.2 | Interprétation géométrique de la dérivation | 268 |
| 6.4.3 | Propriétés | 269 |
| 6.4.4 | Composition de fonctions dérivables | 270 |
| 6.4.5 | Dérivée d'une fonction réciproque | 271 |
| 6.4.6 | Extrémum relatif | 272 |
| 6.4.7 | Théorème de Rolle | 272 |
| 6.4.8 | Théorème des accroissements finis | 273 |
| 6.4.9 | Formules de Taylor | 277 |
| 6.4.10 | Formule de Leibniz | 279 |
| 6.4.11 | Fonctions de classe C^k par morceaux | 280 |
| 6.5 | Fonctions usuelles | 280 |
| 6.5.1 | Fonctions logarithmes | 280 |
| 6.5.2 | Fonction exponentielle | 282 |
| 6.5.3 | Fonctions puissances | 284 |
| 6.5.4 | Fonctions trigonométriques hyperboliques | 285 |
| 6.6 | Développements limités | 286 |
| 6.6.1 | Définition | 286 |
| 6.6.2 | Propriétés | 287 |
| 6.6.3 | Développement limité de base | 288 |
| 6.6.4 | Opérations algébriques sur les développements limités | 289 |
| 6.6.5 | Applications des développements limités | 292 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.6.6 | Équivalent | 295 |
| 6.7 | Fonctions convexes | 297 |
| 6.7.1 | Définition | 297 |
| 6.7.2 | Caractérisation | 298 |
| 7 | INTÉGRATION | 301 |
| 7.1 | Sommes de Darboux | 302 |
| 7.1.1 | Définitions | 302 |
| 7.1.2 | Propriétés | 302 |
| 7.2 | Intégrabilité au sens de Riemann | 303 |
| 7.2.1 | Critère d'intégrabilité | 304 |
| 7.2.2 | Continuité et intégrabilité | 305 |
| 7.2.3 | Sommes de Riemann | 305 |
| 7.3 | Propriétés des intégrales | 310 |
| 7.3.1 | Relation de Chasles | 310 |
| 7.3.2 | Linéarité de l'intégrale | 313 |
| 7.3.3 | Intégrales et inégalités | 314 |
| 7.4 | Primitives et intégrales | 315 |
| 7.4.1 | Intégrale fonction de la borne supérieure | 316 |
| 7.4.2 | Changement de variable | 317 |
| 7.4.3 | Intégration par parties | 318 |
| 7.4.4 | Continuité et intégrale nulle | 320 |
| 7.4.5 | Formule de Taylor avec reste intégral | 320 |
| 7.4.6 | Intégrale d'une fonction à valeurs complexes | 322 |
| 7.5 | Calcul approché d'une intégrale | 323 |
| 7.5.1 | Méthode des rectangles | 323 |
| 7.5.2 | Méthode du point médian | 326 |
| 7.5.3 | Méthode des trapèzes | 328 |
| 7.5.4 | Méthode de Simpson | 331 |
| 7.6 | Calcul des primitives | 336 |
| 7.6.1 | Primitives élémentaires | 336 |
| 7.6.2 | Primitives usuelles | 336 |
| 7.6.3 | Changement de variable | 337 |
| 7.6.4 | Intégration par parties | 339 |
| 7.6.5 | Fractions rationnelles | 340 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7.6.6 | Polynômes et fractions rationnelles trigonométriques | 340 |
| 7.6.7 | Fractions rationnelle en t et $\sqrt{at^2 + bt + c}$ | 341 |
| 7.7 | Intégrales généralisées | 341 |
| 7.7.1 | Convergence | 341 |
| 7.7.2 | Critère de Cauchy pour les intégrales | 342 |
| 7.7.3 | Intégrales absolument convergentes | 343 |
| 7.7.4 | Changement de variable dans les intégrales généralisées | 344 |
| 7.7.5 | Intégration par parties | 346 |
| 7.7.6 | Critères de convergence des intégrales | 346 |
| 7.7.7 | Intégrales généralisées de référence | 351 |
| 7.8 | Calcul des aires et des volumes | 353 |
| 7.8.1 | Calcul d'aire | 353 |
| 7.8.2 | Calcul de volume | 355 |
| 8 | SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS | 359 |
| 8.1 | Différentes notions de convergence | 359 |
| 8.1.1 | Convergence simple et convergence uniforme | 359 |
| 8.1.2 | Convergence normale | 363 |
| 8.1.3 | Transformation d'Abel uniforme | 364 |
| 8.1.4 | Convergence uniforme et continuité | 366 |
| 8.1.5 | Convergence uniforme et intégration | 368 |
| 8.1.6 | Convergence uniforme et dérivation | 369 |
| 8.1.7 | Exemple. Étude de la fonction ζ de Riemann | 372 |
| 8.2 | Produit de deux séries | 374 |
| 8.2.1 | Séries numériques | 375 |
| 8.2.2 | Généralisation | 375 |
| 8.3 | Fonctions holomorphes | 377 |
| 8.3.1 | Définition | 377 |
| 8.3.2 | Propriétés | 379 |
| 8.4 | Séries entières | 380 |
| 8.4.1 | Rayon de convergence | 380 |
| 8.4.2 | Propriétés des séries entières | 382 |
| 8.4.3 | Fonctions développables en série entière | 384 |
| 8.4.4 | Opérations algébriques | 386 |
| 8.4.5 | Développements usuels sur \mathbf{R} | 388 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.5 | Séries entières sur \mathbf{C} | 389 |
| 8.5.1 | Exponentielle complexe | 389 |
| 8.5.2 | Propriétés de l'exponentielle complexe | 389 |
| 8.5.3 | Étude de $x \mapsto e^{ix}$ | 391 |
| 8.5.4 | Fonctions cosinus et sinus complexe | 391 |
| 8.5.5 | Séries entières usuelles sur \mathbf{C} | 394 |
| 9 | ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES | 397 |
| 9.1 | Équations différentielles linéaires d'ordre un | 397 |
| 9.1.1 | Résolution de $y' - a(x)y = 0$ | 398 |
| 9.1.2 | Résolution de $y' - a(x)y = b(x)$ | 398 |
| 9.1.3 | Méthode pratique de résolution | 399 |
| 9.2 | Équations différentielles linéaires d'ordre deux | 400 |
| 9.2.1 | Équations différentielles linéaires d'ordre deux. Méthode 1 . | 401 |
| 9.2.2 | Équations différentielles linéaires d'ordre deux. Méthode 2 . | 403 |
| 9.2.3 | Équations différentielles linéaires d'ordre deux. Méthode 3 . | 405 |
| 9.2.4 | Résolution de $y'' + ay' + by = f(x)$ | 406 |
| 9.2.5 | Équations différentielles linéaires d'ordre deux. Généralisation | 408 |
| 9.3 | Équations différentielles séparables | 413 |
| 9.4 | Applications des équations différentielles | 414 |
| 10 | ALGÈBRE LINÉAIRE | 417 |
| 10.1 | Sous-espaces vectoriels | 417 |
| 10.1.1 | Intersection de sous-espaces vectoriels | 417 |
| 10.1.2 | Sous-espace vectoriel engendré par une partie de E | 418 |
| 10.1.3 | Somme de deux sous-espaces vectoriels | 419 |
| 10.1.4 | Somme directe | 419 |
| 10.2 | Dépendance et indépendance linéaire | 421 |
| 10.2.1 | Définition | 421 |
| 10.2.2 | Propriétés | 421 |
| 10.3 | Bases. Dimension | 425 |
| 10.3.1 | Définition d'une base | 425 |
| 10.3.2 | Bases dans un espace de dimension finie | 426 |
| 10.3.3 | Dimension d'un espace vectoriel | 427 |
| 10.3.4 | Dimension d'un sous-espace vectoriel | 429 |
| 10.3.5 | Dimension et somme directe | 430 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 10.3.6 | Rang d'un système de vecteurs | 432 |
| 10.4 | Complément sur les applications linéaires | 432 |
| 10.4.1 | Bases et applications linéaires | 432 |
| 10.4.2 | Dimension et application linéaire | 435 |
| 10.4.3 | Rang d'une application linéaire | 436 |
| 10.4.4 | Applications linéaires usuelles | 436 |
| 10.5 | Matrices et applications linéaires | 442 |
| 10.5.1 | Matrices | 442 |
| 10.5.2 | Matrice d'une application linéaire | 444 |
| 10.5.3 | Changement de bases | 448 |
| 10.5.4 | Cas particuliers | 451 |
| 10.6 | Déterminant | 452 |
| 10.6.1 | Formes multilinéaires | 452 |
| 10.6.2 | Application déterminant | 454 |
| 10.6.3 | Déterminant d'un endomorphisme | 455 |
| 10.6.4 | Déterminant d'une matrice | 457 |
| 10.6.5 | Calcul des déterminants | 458 |
| 10.6.6 | Inverse d'une matrice | 459 |
| 10.7 | Systèmes linéaires | 460 |
| 10.7.1 | Systèmes linéaires à n équations et p inconnues | 460 |
| 10.7.2 | Interprétations d'un système linéaire | 461 |
| 10.7.3 | Méthode de Gauss | 462 |
| 10.7.4 | Système de Cramer | 465 |
| 10.8 | Réduction des endomorphismes | 467 |
| 10.8.1 | Valeurs et vecteurs propres | 468 |
| 10.8.2 | Polynôme caractéristique | 468 |
| 10.8.3 | Endomorphismes diagonalisables | 469 |
| 10.8.4 | Endomorphisme trigonalisable | 471 |
| 10.8.5 | Applications de la réduction | 478 |
| 11 | ESPACES EUCLIDIENS | 483 |
| 11.1 | Généralités | 483 |
| 11.1.1 | Définitions | 483 |
| 11.1.2 | Propriétés | 485 |
| 11.1.3 | Orthogonalité | 486 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 11.2 | Orientation | 491 |
| 11.3 | Applications orthogonales | 492 |
| 11.3.1 | Définition d'une application orthogonale | 492 |
| 11.3.2 | Isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens | 494 |
| 11.3.3 | Matrices orthogonales | 496 |
| 11.4 | Produit vectoriel. Approche algébrique | 497 |
| 11.4.1 | Définition du produit vectoriel | 497 |
| 11.4.2 | Propriétés du produit vectoriel | 499 |
| 11.4.3 | Vecteur normal à un hyperplan | 503 |
| 11.5 | Projections et symétries orthogonales | 504 |
| 11.5.1 | Projection orthogonale vectorielle | 504 |
| 11.5.2 | Symétrie orthogonale vectorielle | 506 |
| 11.6 | Groupe orthogonal | 507 |
| 11.7 | Groupe spécial orthogonal | 508 |
| 11.7.1 | Définition du groupe spécial orthogonal d'ordre n | 508 |
| 11.7.2 | Propriété fondamentale | 509 |
| 11.8 | Groupe orthogonal en dimension 1 | 510 |
| 11.9 | Groupe orthogonal en dimension 2 | 510 |
| 11.9.1 | Généralités | 510 |
| 11.9.2 | Cas des applications orthogonales positives en dimension 2 | 511 |
| 11.9.3 | Cas des applications orthogonales négatives en dimension 2 | 513 |
| 11.9.4 | Générateurs du groupe orthogonal en dimension 2 | 514 |
| 11.9.5 | Interprétation géométrique des applications orthogonales positives en dimension 2 | 515 |
| 11.9.6 | Interprétation géométrique des applications orthogonales négatives en dimension 2 | 518 |
| 11.10 | Groupe orthogonal en dimension 3 | 519 |
| 11.10.1 | Le théorème fondamental | 519 |
| 11.10.2 | Classification des applications orthogonales en dimension 3 | 520 |
| 11.10.3 | Générateurs du groupe orthogonal en dimension 3 | 527 |
| 11.10.4 | Méthode pratique d'étude en dimension 3 | 528 |
| 11.11 | Résumé | 528 |
| 11.12 | Produit vectoriel : approche géométrique | 529 |
| 12 | ESPACES AFFINES | 533 |
| 12.1 | Généralités sur les espaces affines | 534 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 12.1.1 | Définition | 534 |
| 12.1.2 | Repères | 535 |
| 12.1.3 | Unicité | 535 |
| 12.2 | Variétés linéaires affines | 536 |
| 12.2.1 | Définition | 536 |
| 12.2.2 | Propriétés | 536 |
| 12.2.3 | Parallélisme | 538 |
| 12.2.4 | Cas particuliers | 540 |
| 12.2.5 | Équations paramétriques d'une variété affine | 540 |
| 12.2.6 | Équations cartésiennes d'une variété affine | 542 |
| 12.2.7 | Équation cartésienne d'un hyperplan | 544 |
| 12.2.8 | Variétés linéaires affines et barycentre | 548 |
| 12.2.9 | Repère affine | 551 |
| 12.3 | Applications affines | 553 |
| 12.3.1 | Définitions et propriétés | 553 |
| 12.3.2 | Représentation matricielle d'une application affine | 556 |
| 12.3.3 | Isomorphisme d'espaces affines | 557 |
| 12.3.4 | Applications affines et barycentres | 558 |
| 12.3.5 | Applications affines et variétés affines | 560 |
| 12.3.6 | Points fixes d'une application affine | 561 |
| 12.3.7 | Groupe affine. Le théorème fondamental | 562 |
| 12.3.8 | Applications affines usuelles | 565 |
| 12.4 | Espaces affines euclidiens | 574 |
| 12.4.1 | Définition | 574 |
| 12.4.2 | Isomorphisme entre espaces affines euclidiens | 575 |
| 12.4.3 | Propriétés topologiques de E_n | 576 |
| 12.4.4 | Distance entre sous-ensembles | 577 |
| 12.4.5 | Projection orthogonale | 577 |
| 12.4.6 | Distance d'un point à un hyperplan | 578 |
| 12.4.7 | Perpendiculaire commune | 580 |
| 12.4.8 | Orthogonalité et perpendicularité | 583 |
| 12.5 | Notions élémentaires sur les angles orientés | 584 |
| 12.6 | Isométries | 586 |
| 12.6.1 | Généralités sur les isométries | 587 |
| 12.6.2 | Réflexion | 589 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 12.6.3 | Groupe des isométries de E_n | 591 |
| 12.6.4 | Isométries de E_1 | 594 |
| 12.6.5 | Isométries de E_2 | 595 |
| 12.6.6 | Isométries d'une partie de E_n | 604 |
| 12.7 | Exemples de groupes d'isométries dans E_2 | 606 |
| 12.7.1 | Deux points de E_2 | 606 |
| 12.7.2 | Triangle équilatéral | 607 |
| 12.7.3 | Parallélogramme | 608 |
| 12.7.4 | Polygones réguliers convexes de E_2 | 612 |
| 12.8 | Tétraèdre régulier | 614 |
| 13 | GÉOMÉTRIE CLASSIQUE | 623 |
| 13.1 | Généralités | 623 |
| 13.2 | Ensemble des points de E_2 vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$ | 624 |
| 13.3 | Arc et cercle capables | 625 |
| 13.3.1 | Angles de droites à côtés orthogonaux | 625 |
| 13.3.2 | Angle inscrit et angle au centre | 625 |
| 13.3.3 | Cercle capable | 627 |
| 13.3.4 | Arc capable | 628 |
| 13.3.5 | Arcs et cercle capables par les nombres complexes | 629 |
| 13.4 | Axe radical | 630 |
| 13.4.1 | Puissance d'un point par rapport à un cercle | 630 |
| 13.4.2 | Axe radical de deux cercles | 631 |
| 13.4.3 | Intersection d'un cercle et d'une droite | 632 |
| 13.4.4 | Conditions d'intersection de deux cercles | 632 |
| 13.4.5 | Construction de l'axe radical | 633 |
| 13.5 | Conditions de cocyclicité de quatre points de E_2 | 634 |
| 13.6 | Le triangle | 635 |
| 13.6.1 | Médiatrices du triangle | 636 |
| 13.6.2 | Médianes du triangle | 636 |
| 13.6.3 | Hauteurs du triangle | 636 |
| 13.6.4 | Bissectrices du triangle | 638 |
| 13.7 | Droite et cercle d'Euler | 643 |
| 13.8 | Coordonnées barycentriques | 645 |
| 13.8.1 | Cas général | 645 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 13.8.2 | Points particuliers du triangle | 646 |
| 13.9 | Relations métriques dans le triangle | 649 |
| 13.9.1 | Loi des cosinus | 649 |
| 13.9.2 | Loi des sinus | 650 |
| 13.9.3 | Théorème de la médiane | 652 |
| 13.10 | Courbes paramétrées | 653 |
| 13.10.1 | Fonctions vectorielles | 653 |
| 13.10.2 | Arc paramétré | 654 |
| 13.10.3 | Schéma d'étude d'un arc paramétré | 656 |
| 13.10.4 | Exemples | 658 |
| 14 | PROBABILITÉ | 661 |
| 14.1 | Analyse combinatoire | 661 |
| 14.1.1 | Arrangement avec répétition et p -liste | 661 |
| 14.1.2 | Arrangement | 662 |
| 14.1.3 | Combinaison | 663 |
| 14.1.4 | Tirages | 665 |
| 14.2 | Modèle probabiliste de Kolmogorov | 666 |
| 14.2.1 | Notion d'événement et expérience aléatoire | 666 |
| 14.2.2 | Algèbre des événements | 667 |
| 14.2.3 | Probabilité d'un événement | 669 |
| 14.2.4 | Hypothèse d'équiprobabilité | 671 |
| 14.3 | Probabilité conditionnelle | 680 |
| 14.3.1 | Introduction | 680 |
| 14.3.2 | Définition | 681 |
| 14.3.3 | Indépendance | 683 |
| 14.3.4 | Formule des probabilités totales | 684 |
| 14.3.5 | Formule de Bayes | 685 |
| 14.4 | Variables aléatoires | 685 |
| 14.4.1 | Définition d'une variable aléatoire réelle | 685 |
| 14.4.2 | Loi de probabilité | 686 |
| 14.4.3 | Espérance mathématique | 688 |
| 14.4.4 | Variance | 692 |
| 14.4.5 | Propriétés de la variance | 693 |
| 14.5 | Couples aléatoires | 696 |

| | | |
|--------|--|------------|
| 14.5.1 | Définition | 696 |
| 14.5.2 | Variables aléatoires indépendantes | 697 |
| 14.6 | Covariance | 698 |
| 14.6.1 | Définition de la covariance | 698 |
| 14.6.2 | Propriétés de la covariance | 698 |
| 14.6.3 | Coefficient de corrélation | 701 |
| 14.7 | Loi des grands nombres | 702 |
| 14.7.1 | Inégalité de Bienaymé-Tchebychev | 702 |
| 14.7.2 | Loi faible des grands nombres | 703 |
| 14.8 | Lois de probabilité usuelles | 704 |
| 14.8.1 | Loi binomiale | 704 |
| 14.8.2 | Loi de Poisson | 706 |
| 14.8.3 | Loi géométrique | 707 |
| 14.8.4 | Loi exponentielle | 708 |
| 14.9 | Droite de régression linéaire | 710 |
| | Bibliographie | 711 |
| | Index | 713 |