Colles
corrigées et commentées

PCSi – PTSi

Maths

S'entraîner aux concours dès la **Sup**

ellipses

Éric Billault

Chapitre n° 1

Somme et produit

Sommes de référence

Soit p et q des entiers naturels tels que $p \leqslant q$. L'expression $\sum_{k=p}^{q} a_k$ désigne la somme $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$. Cette somme contient $q-p+1$ termes. Il y a quatre sommes de référence à connaître.

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $1+2+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall q \in \mathbf{C}$,

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

4. La formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarques :

- Si $q < p$, on convient que $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$.
- Les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$ peuvent commencer à $k=0$ c'est-à-dire on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

- La formule $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ n'est valable que si $q \neq 1$.
- Dans la formule du binôme de Newton, l'exposant $n-k$ peut être mis sur le facteur a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Il y a deux règles de manipulation sur les sigmas. Soit $(a_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ et $(b_k)_{p \leqslant k \leqslant q}$ des familles de nombres réels ou complexes.

1. La règle de séparation : $\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k$.
2. Factorisation/développement : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\sum_{k=p}^{q} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k$.

Colle n° 1 ★

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}}$.

On reconnaît la formule du binôme de Newton avec $a = 2^{\frac{1}{2}}$ et $b = 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k 1^{n-k} = \boxed{(\sqrt{2}+1)^n}$$

Colle n° 2 ★

Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, la somme $S_n = \sum_{i=n}^{2n} (i+1+n)$.

On a

$$S_n = \sum_{i=n}^{2n} i + \sum_{i=n}^{2n} (1+n)$$

Commentaires

Pour se ramener à la somme de référence $\sum_{k=1}^{n} k$, on effectue un changement d'indice dans la première somme. La seconde somme est la somme d'une constante.

On effectue le changement d'indice $j = i - n$ dans la première somme. Lorsque $n \leqslant i \leqslant 2n$ alors $0 \leqslant j \leqslant n$:

$$\sum_{i=n}^{2n} i = \sum_{j=0}^{n} (j+n) = \sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

On a $\sum_{i=n}^{2n} (1+n) = (2n-n+1)(1+n) = (n+1)^2$. Donc

$$S_n = \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{3n}{2} + n + 1\right) = \boxed{\frac{(n+1)(5n+2)}{2}}$$

Commentaires

On effectue un test de cohérence. Par exemple, pour $n = 1$, on a $S_1 = \sum_{i=1}^{2} (i+2) = 3+4 = 7$. La formule donne $\frac{2 \times 7}{2} = 7$ ✓

Colle n° 3 ⋆

Déterminer des réels a et b tels que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire le calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

On a $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$. Afin que cette fraction soit égale à $\frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il suffit de choisir a et b tels que $a+b=0$ et $a=1$. On a alors $(a,b) = (1,-1)$. On a donc la décomposition :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

Commentaires

La somme S_n est un exemple de somme dite télescopique. C'est une somme du type

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

Les termes se simplifient deux à deux. Il ne reste que les termes extrêmes.

Colle nº 4 ⋆

Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{100} |50 - k|$.

Commentaires

La valeur absolue du nombre réel x est par définition $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Il faut donc connaître le signe de $50 - k$. D'où l'idée de couper la somme en deux selon que $k \leqslant 50$ ou $k \geqslant 50$.

On a

$$S = \sum_{k=1}^{50} |50 - k| + \sum_{k=51}^{100} |50 - k| = \sum_{k=1}^{50} (50 - k) + \sum_{k=51}^{100} (-50 + k)$$

Commentaires

Remarquons que la seconde somme part de $k = 51$ et non $k = 50$. Sinon le terme pour $k = 50$ serait comptabilisé deux fois (ce qui, ici, est sans conséquence car ce terme est nul).

On effectue le changement d'indice $\ell = 50 - k$ dans la première somme. Lorsque k varie dans $[\![1, 50]\!]$ alors ℓ varie dans $[\![0, 49]\!]$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{50} (50 - k) = \sum_{\ell=0}^{49} \ell = \frac{49 \times 50}{2}$$

On effectue la changement d'indice $\ell = k - 50$ dans la seconde somme. Lorsque k varie dans $[\![51, 100]\!]$ alors ℓ varie dans $[\![1, 50]\!]$. On a alors

$$\sum_{k=51}^{100} (-50 + k) = \sum_{\ell=1}^{50} \ell = \frac{50 \times 51}{2}$$

On a donc $S = \dfrac{49 \times 50}{2} + \dfrac{50 \times 51}{2} = \dfrac{50}{2}(49 + 51) = \dfrac{50 \times 100}{2} = 50^2 = \boxed{2500}$

Colle n° 5 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = (1+x)^n$. En calculant la dérivée de f_n de deux façons différentes, en déduire le calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Par la formule du binôme de Newton :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

En dérivant la somme, on a, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

En dérivant directement f_n, on a : $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$. D'où l'égalité

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

On évalue l'égalité précédente en $x = 1$; on obtient $\boxed{S_n = n2^{n-1}}$

Commentaires

Une autre façon de calculer la somme est d'utiliser la formule dite « du chef » :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

En effet, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

On a alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$:

$$S_n = n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton avec $a=b=1$ de sorte que

$$S_n = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Colle n° 6 ★★

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Exprimer la somme $A = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. À l'aide d'un changement d'indice, exprimer A en fonction de S_4 et n uniquement.
3. En déduire le calcul de la somme S_3.

1. En développant $(k+1)^4$, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n} (k^4+4k^3+6k^2+4k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n \end{aligned}$$

2. On effectue le changement d'indice $\ell = k+1$. On a

$$A = \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell^4 = S_4 + (n+1)^4 - 1$$

> **Commentaires**
>
> Lors d'un changement d'indice, il ne faut pas oublier de changer l'indice initial et final. Ici, lorsque $k=1$, $\ell=2$ et lorsque $k=n$, $\ell=n+1$.

3. En égalisant les deux expressions précédentes de A, on a

$$\cancel{S_4} + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = \cancel{S_4} + (n+1)^4 - 1$$

D'où

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2 - 4S_1 \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\ &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right] \\ &= (n+1)^2\left[(n+1)^2 - (2n+1)\right] = n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Commentaires

Le très mauvais réflexe serait, dans ce genre de calcul, de développer. Il faut, au contraire, factoriser.

D'où

$$\boxed{S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2}$$

Colle n° 7 ★★

Calculer $999\,999^3$.

$$\begin{aligned} 999\,999^3 = (10^6-1)^3 &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^{3-k}10^{6k} \\ &= -\binom{3}{0}+\binom{3}{1}10^6-\binom{3}{2}10^{12}+\binom{3}{3}10^{18} \\ &= -1+3.10^6-3.10^{12}+10^{18} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{rcccccccc} 10^{18} & = & 1 & 000 & 000 & 000 & 000 & 000 & 000 \\ 10^{18}-1 & = & & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 & 999 \\ 10^{18}-1-3.10^{12} & = & & 999 & 996 & 999 & 999 & 999 & 999 \\ 10^{18}-1-3.10^{12}+3.10^6 & = & & 999 & 997 & 000 & 002 & 999 & 999 \end{array}$$

On a donc

$$\boxed{999\,999^3 = 999\,997\,000\,002\,999\,999}$$

Somme double

On considère le tableau de nombres avec n lignes et p colonnes :

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & \leftarrow & \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & \leftarrow & \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1} & & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} & \leftarrow & \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & & \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} & & \sum_{i=1}^{n} a_{i,p} & &
\end{array}
$$

Le théorème de Fubini exprime le fait que pour calculer la somme de tous les nombres du tableau, on additionne les nombres soit par colonne soit par ligne.

Théorème (Fubini sur un rectangle).

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)}_{\text{par ligne}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{par colonne}}$$

Cette somme se note $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.