Jonathan Rotge

1re SPE

Mathématiques

Pour un accompagnement personnalisé

39 fiches

204 exercices corrigés

13 QCM bilan

ellipses

Chapitre 1

Notations ensemblistes et logique

Fiche 1.1 – Symboles mathématiques

→ Découvrir les symboles mathématiques élémentaires
→ Écrire une proposition mathématique à l'aide de symboles
→ Comprendre une expression mathématique contenant des symboles

Fiche 1.2 – Logique

→ Manipuler des raisonnements logiques
→ Savoir exprimer la réciproque et la contraposée d'une proposition
→ Formuler la négation d'une proposition

Fiche 1.3 – Méthodes de démonstration

→ Comprendre un énoncé mathématique
→ Découvrir le raisonnement par l'absurde
→ Utiliser des outils de logique mathématique pour résoudre des problèmes

9782340-089457_001_288.indd 13 10/04/2024 16:01

Fiche 1.1 – Symboles mathématiques

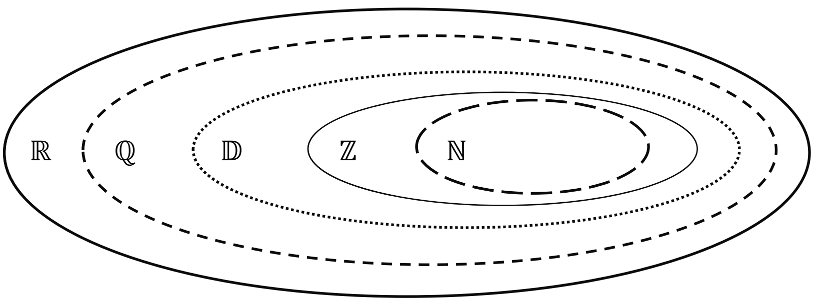
- Un **sous-ensemble** A d'un ensemble E est constitué d'une partie des éléments de E. On dit que A est **inclus** dans E et on le note :

$$A \subset E$$

  Si B est un autre sous-ensemble de E, on note $A \cap B$ l'**intersection** de A et B ; il s'agit de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B. De la même façon, on note $A \cup B$ la **réunion** de A et B ; il s'agit de tous les éléments appartenant soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles à la fois.

  Si x est un élément **appartenant** à l'ensemble A, on note $x \in A$. S'il ne lui appartient pas, on peut naturellement noter $x \notin A$. L'ensemble de tous les éléments n'appartenant pas à A est appelé le **complémentaire** de A dans E. On le note $\bar{A}$ ou encore $E \backslash A$.

- En classe de Première, on distingue cinq ensembles de nombres possédant des propriétés particulières et que l'on rencontre très fréquemment. L'ensemble des nombres entiers **naturels** ($\mathbb{N}$), des nombres entiers **relatifs** ($\mathbb{Z}$), des nombres **décimaux** ($\mathbb{D}$), des nombres **rationnels** ($\mathbb{Q}$) et des nombres **réels** ($\mathbb{R}$). On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



- On appelle **quantificateur** un symbole mathématique permettant d'exprimer une proportion d'éléments. Deux d'entre eux sont d'utilisation courante :
  - $\forall$ se lit « quel que soit » ou encore « pour tout » et permet d'exprimer le fait qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs d'un ensemble à préciser ;
  - $\exists$ se lit « il existe » et permet d'exprimer l'existence d'au moins un élément vérifiant une propriété à préciser.

9782340-089457_001_288.indd 14 10/04/2024 16:01

Les exemples

- Considérons l'ensemble $E = \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 11\}$. Dans ce cas les ensembles $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{3, 5, 7, 9\}$ sont deux sous-ensembles de E, on peut noter :

  $A \subset E$ et $B \subset E$

  À l'inverse, l'ensemble $C = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ n'est pas inclus dans E car l'élément 2 n'appartient pas à E, ce qui peut se noter $2 \notin E$.On peut ensuite remarquer que les entiers 3 et 5 sont les deux seuls éléments en commun des ensembles A et B, donc :

  $$A \cap B = \{3\ ;\ 5\}$$

  Par ailleurs, la réunion de A et B sera obtenue en regroupant tous les éléments présents dans A et/ou dans B. Cela nous donne :

  $$A \cup B = \{1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 9\}$$

- Nous pouvons illuster la notion de **complémentaire** sur les ensembles de nombres particuliers. Par exemple, le complémentaire de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ est constitué de tous les nombres entiers strictement négatifs :

  $$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

  Il est également intéressant de penser au complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit, par définition, de tous les nombres réels non rationnels. De tels nombres sont qualifiés d'**irrationnels** : π et $\sqrt{2}$ en sont deux exemples.

- Pour traduire mathématiquement que tout carré est toujours positif, on peut utiliser l'écriture « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ ». Pour traduire mathématiquement qu'un cube peut être négatif, on peut utiliser l'écriture « $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 < 0$ ».

L'essentiel à retenir

Les relations **ensemblistes** se traduisent souvent à l'aide de symboles :

$\in$ ($appartient$ à) ; $\subset$ ($est\ inclus$) ; $\cap$ ($intersection$) ; $\cup$ ($réunion$)

Il est important de connaître les inclusions des principaux ensembles

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Deux **quantificateurs** permettent de simplifier les écritures mathématiques :

$\forall$ ($quel\ que\ soit$) ; $\exists$ ($il\ existe$)

Les exercices

✍ **Exercice 1**

Dans cet exercice, nous noterons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres entiers pairs et $\mathbb{I}$ l'ensemble des nombres entiers impairs.

1. Déterminer deux éléments x_p et x_i tels que $x_p \in \mathbb{P}$ et $x_i \in \mathbb{I}$.
2. Peut-on trouver un nombre entier x tel que $x \in \mathbb{P}$ et $x \in \mathbb{I}$?
3. Préciser alors l'ensemble $\mathbb{P} \cap \mathbb{I}$.
4. De la même façon, est-il possible de trouver un nombre réel x qui vérifie $x \notin \mathbb{P}$ et $x \notin \mathbb{I}$? Et si x est un nombre entier ?
5. En déduire l'ensemble $\mathbb{P} \cup \mathbb{I}$.

Un couple de sous-ensembles A et B d'un ensemble E qui vérifient $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ est appelé une **partition** de E.

6. Justifier que le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{I})$ forme une partition de $\mathbb{Z}$.
7. Proposer un exemple de partition de l'ensemble $E = \{-2\ ;\ -1\ ; 0\ ; 1\ ; 2\}$.

✍ **Exercice 2**

L'objectif de cet exercice est de mieux comprendre la structure des principaux ensembles de nombres. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, proposer une justification rapide, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- $\frac{6}{5} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{D}$
- Le complémentaire de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.
- $\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
- Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $x^2 \in \mathbb{N}$.
- Si $x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ alors $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$.

✍ **Exercice 3**

Dans cet exercice, nous noterons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Nous rappellons qu'un nombre entier positif p est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. On notera également $2\mathbb{N}$ l'ensemble de tous les nombres entiers pairs.

1. Justifier le choix de la notation $2\mathbb{N}$.
2. Quel ensemble pourrait alors représenter la notation $2\mathbb{Z}$?
3. Justifier alors que $\mathbb{P} \cap 2\mathbb{N} = \mathbb{P} \cap 2\mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\mathbb{P} \cap 2\mathbb{N} = \{2\}$.

Dans la suite de l'exercice, on notera n un nombre entier naturel quelconque et on considère que la notation $n\mathbb{N}$ désigne tous les entiers positifs multiples de n.

5. À quelle condition, portant sur n, l'ensemble $\mathbb{P} \cap n\mathbb{N}$ est-il non vide ?
6. Lorsque cette condition est remplie, quel est le cardinal (c'est-à-dire le nombre d'éléments) de cet ensemble ?

✍ **Exercice 4**

Traduire par une phrase les propositions mathématiques ci-dessous

1. $\exists x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \geq -1{,}5$.
2. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} > 0$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\exists a \in \mathbb{Z}$, $\exists b \in \mathbb{N}$ tels que $q = \frac{a}{b}$.

Traduire par une expression mathématique chacune des propositions suivantes :

4. Il existe un nombre réel dont le carré est strictement inférieur à 1.
5. Tout nombre entier relatif appartient à l'ensemble des nombres rationnels.
6. Tout nombre réel négatif élevé au cube est négatif.

✍ **Exercice 5* - Produit cartésien**

Dans cet exercice, nous considérerons deux ensembles A et B. On appelle **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$, l'ensemble de tous les couples formés d'un élément de A et d'un élément de B.

1. Justifier l'écriture ci-dessous :

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$$

2. Dans cette question, on suppose que $A = B = \mathbb{Z}$.
   a. Donner un exemple de couple $(a, b) \in A \times B$.
   b. On associe désormais à tout couple $(a, b) \in A \times B$, le point de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé du plan. Où se situent les éléments de $A \times B$ dans le plan ?
   c. Déterminer les couples de $A \times B$ correspondant au sommet d'un carré de côté 4 et dont les diagonales se coupent à l'origine.
3. On revient désormais au cas général et on considère deux ensembles supplémentaires C et D. À quelle(s) condition(s) a-t-on $A \times B \subset C \times D$?
4. Supposons $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{D}$ et $D = \mathbb{Z}$. Déterminer les ensembles $(A \times B) \cap (C \times D)$ et $(A \times B) \cup (C \times D)$.

Exercices

9782340-089457_001_288.indd 17 10/04/2024 16:01

Les corrigés

✍ **Exercice 1**

1. Dans cette première question, on peut choisir n'importe quel nombre pair pour x_p et impair pour x_i. On a donc, par exemple, $x_p = 2$ et $x_i = 3$.
2. Si un tel entier x existe, cela signifie que x est à la fois pair et impair. Or, aucun nombre ne vérifie cette propriété, c'est donc impossible.
3. On sait que $\mathbb{P} \cap \mathbb{I}$ est composé de tous les nombres appartenant à la fois à $\mathbb{P}$ et à $\mathbb{I}$. Nous avons montré à la question précédente qu'aucun nombre ne vérifie cette propriété. En d'autres termes,
$$\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$
4. La notion de parité ne porte que sur les nombres entiers. Ainsi, tout nombre réel non entier n'est ni pair ni impair. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{P}$ et $y \notin \mathbb{I}$. En revanche, tout nombre entier est soit pair soit impair. Dans ce cas, il n'existe aucun nombre entier vérifiant cette propriété.
5. La question précédente montre que tout entier est soit dans $\mathbb{P}$ soit dans $\mathbb{I}$. Ainsi, $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{Z}$.
6. Les questions 3. et 5. ont montré que $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ et $\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{Z}$. Autrement dit, le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{I})$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
7. On peut choisir $A = \{-2\,;0\,;2\}$ et $B = \{-1\,;1\}$ par exemple.

✍ **Exercice 2**

1. Le nombre $\frac{6}{5}$ peut également s'écrire 1,2 sous forme décimale. Autrement dit, $\frac{6}{5}$ est un nombre décimal, c'est-à-dire $\frac{6}{5} \in \mathbb{D}$ ou encore $\frac{6}{5} \notin \mathbb{Q}\backslash\mathbb{D}$. La proposition est **fausse**.
2. Prenons l'exemple de π. On sait que $\pi \notin \mathbb{N}$, donc $\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ mais π est un nombre irrationnel. Ainsi, $\pi \notin \mathbb{Q}$ et la proposition est **fausse**.
3. On sait que $\pi \notin \mathbb{Z}$ donc $\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. La proposition est donc **vraie**.
4. Le carré d'un entier est toujours un entier positif. La proposition est **vraie**.
5. On sait que $2 \in \mathbb{N}$ donc, en particulier, $2 \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$. En revanche, $\sqrt{2}$ est un irrationnel donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. La proposition est **fausse**.

✍ **Exercice 3**

1. Par définition, $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\dots\}$. Si on multiplie par 2 chacun des éléments de $\mathbb{N}$, on obtient l'ensemble des nombres pairs positifs, ce qui justifie ce choix de notation.
2. On obtient en plus les multiples de 2 négatifs. Ainsi, $2\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble de tous les entiers multiples de 2.

9782340-089457_001_288.indd 18 10/04/2024 16:01

3. Les nombres premiers étant par définition des nombres positifs, on a l'inclusion $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. On peut alors en déduire la propriété demandée puisqu'aucun nombre négatif n'appartient à $\mathbb{P}$.
4. Soit $x \in \mathbb{P} \cap 2\mathbb{N}$. Puisque $x \in 2\mathbb{N}$, x est divisible par 2. Or, $x \in \mathbb{P}$ donc x ne peut admettre que 2 comme diviseur différent de 1. Il vient $x = 2$ et donc $\mathbb{P} \cap 2\mathbb{N} = \{2\}$.
5. Tout élément de $n\mathbb{N}$ est divisible par n. Il est donc nécessaire que $n \in \mathbb{P}$.
6. Cette généralisation de la question 4. se résout de la même manière. Seul n est premier dans $n\mathbb{N}$. Ainsi, on a $\mathbb{P} \cap n\mathbb{N} = \{n\}$ et en particulier $\mathrm{Card}(\mathbb{P} \cap n\mathbb{N}) = 1$.

✍ **Exercice 4**

1. Il existe un nombre entier relatif qui soit supérieur à $-1{,}5$.
2. La racine carrée de tout nombre réel strictement positif est strictement positive.
3. Tout nombre rationnel s'écrit comme le quotient d'un nombre entier relatif et d'un nombre entier naturel.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$.
5. $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Q}$ (ou plus simplement $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).
6. $\forall x \in]-\infty\,;0[, x^3 \in]-\infty\,;0[$.

✍ **Exercice 5**

1. Un couple d'éléments est toujours noté (a, b). Ensuite, pour préciser que ce couple appartient au produit cartésien $A \times B$, on doit indiquer que $a \in A$ et $b \in B$. Enfin, $A \times B$ étant lui-même un ensemble, ses éléments sont indiqués entre accolades. On obtient alors bien la notation proposée dans l'énoncé.
2. a. Si $A = B = \mathbb{Z}$, on peut choisir n'importe quel couple d'entiers relatifs. Par exemple, le couple $(-2, 7) \in A \times B$.
   b. On rappelle que la notation d'un point du plan s'écrit comme un couple de deux nombres réels, le premier étant l'**abscisse** et le deuxième l'**ordonnée**. Dans cette question, les abscisses et ordonnées appartiennent à $\mathbb{Z}$, l'ensemble de tous les éléments de $A \times B$ se situe donc au niveau des points de coordonnées entières.
   c. La description du carré en question se traduit par une symétrie des sommets du carré par rapport à l'origine. En notant $ABCD$ ce carré, on a $A(-2\,;2)$, $B(2\,;2)$, $C(2\,;-2)$ et $D(-2\,;-2)$.
3. D'après la définition du produit cartésien, on a $A \times B \subset C \times D$ si $A \subset C$ et $B \subset D$.
4. Il est facile de remarquer que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ soit $(\mathbb{N} \cap \mathbb{D}) \times (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}) = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. De même, $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ soit $(\mathbb{N} \cup \mathbb{D}) \times (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}) = \mathbb{D} \times \mathbb{Q}$.

Corrigés

9782340-089457_001_288.indd 19 10/04/2024 16:01

Fiche 1.2 – Logique

- Une **proposition logique** est une phrase en français comportant éventuellement des connecteurs logiques tels que **ET** ou encore **OU**, ainsi que des quantificateurs tels que $\forall$ et $\exists$. Ces propositions logiques permettent par exemple d'énoncer une propriété mathématique.

- Dire qu'une propriété P **implique** une propriété Q signifie qu'à chaque fois que la propriété P sera vérifiée, la propriété Q sera également vérifiée. On obtient alors la proposition logique :

$$P \Longrightarrow Q \qquad \textbf{(1)}$$

  On appelle **proposition réciproque** l'implication inverse, c'est-à-dire $P \Longleftarrow Q$. Celle-ci n'est pas toujours vraie. Lorsqu'elle l'est, on dit alors que les deux propriétés P et Q sont équivalentes. On obtient alors la proposition logique :

$$P \Leftrightarrow Q \qquad \textbf{(2)}$$

  On appelle **négation** d'une propriété P, la propriété obtenue en niant les différents éléments de cette propriété. Nous la noterons « $non\ P$ ».

  On appelle **proposition contraposée** de la proposition **(1)**, la proposition logique suivante :

$$non\ Q \Longrightarrow non\ P \qquad \textbf{(3)}$$

  La proposition **(3)** est toujours vraie dès lors que **(1)** est vraie. Cette propriété peut s'écrire sous la forme d'une proposition logique :

$$(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (non\ Q \Longrightarrow non\ P)$$

- Reprenons la proposition logique **(1)**. On dit alors que Q est une **condition nécessaire** pour que la propriété P soit vérifiée. À l'inverse, on dit que P est une **condition suffisante** pour que la propriété Q soit vérifiée. Si on a l'équivalence de la proposition **(2)**, on dit alors que Q est une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété P soit vérifiée.

  Méthode – Déterminer la négation d'une proposition revient à nier les différentes propriétés qui la constituent. En particulier, le quantificateur $\forall$ sera transformé en $\exists$ et inversement. Ainsi, la négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » sera « $\exists x \in E, non\ P(x)$ ». À l'inverse, la négation de « $\exists x \in E, Q(x)$ » sera « $\forall x \in E, non\ Q(x)$ ».

9782340-089457_001_288.indd 20 10/04/2024 16:01