MATHS

Cours approfondi
Exercices
Problèmes

3^e^

Laurent Lemaire
Anne Paradas Arroyo

ellipses

CHAPITRE 0

Règles en mathématiques

Repères historiques. Vers 3000 avant J.-C., l'écriture apparaît dans les civilisations mésopotamienne, égyptienne et chinoise. On y trouve aussi les premières traces d'existence de techniques mathématiques :

- systèmes de numération et méthodes de calcul pour la gestion administrative (gestion du calendrier, transaction commerciale, collecte des impôts...) ;
- géométrie élémentaire pour résoudre les questions de mesure (volume de grain et aire des champs, architecture . . .).

Les techniques mathématiques utilisées sont des **procédures algorithmiques** indiquant chaque étape à réaliser pour parvenir au résultat souhaité. Elles sont données ou montrées uniquement sur des exemples sans généralisation, ni démonstration.

Pour les Grecs au contraire, les mathématiques deviennent progressivement l'étude des propriétés d'objets géométriques ou numériques. EUCLIDE (3e siècle av. J.-C.) commence par énoncer l'ensemble des postulats sur lesquels sa théorie mathématique repose, puis il énonce et démontre une succession de propositions – la démonstration ne reposant que sur ce qui a été admis ou déjà prouvé auparavant –.

Explication : Le mot **mathématique** vient du grec *mathêma* signifiant « ce qui est enseigné » quand il s'agit de « science, connaissance ».

I Règles en mathématiques

1 Généralités

Faire des mathématiques c'est poser et, si possible, résoudre des problèmes.

Explication : Le mot **problème** vient du latin *problema* signifiant « question à résoudre », lui même emprunté du grec *problêma*. Le préfixe *pro* signifie « devant », la racine *blê* signifie « lancer », problème signifie donc « objet lancé devant, obstacle ».

La résolution de problèmes en mathématiques s'appuie sur le raisonnement.

Explication : Le mot **raisonnement** vient du latin *ratio* signifiant « calcul, compte » et par extension « faculté de compter ». CICÉRON (106–43 av. J.-C.) donne aussi à *ratio* le sens de « le pourquoi d'une chose ».
Le mot raisonnement prend au 17e siècle le sens : « opération de l'esprit passant d'un jugement à un autre pour aboutir à une conclusion ».

Cela signifie que les énoncés doivent être bien formés et non ambigus. La **rédaction** a pour but de faire comprendre clairement au lecteur les étapes de résolution du problème. Par exemple, **une succession de calculs**, sans aucune phrase en français, ne permet pas de comprendre le raisonnement. De même, **une figure géométrique** doit être codée avec les données du problème (et non avec ce que l'on veut prouver).

Explication : Le mot **démonstration** vient du latin *demonstratio* signifiant « action de montrer, description », il remplace le mot de l'ancien français *demostraison* (au 12e siècle) qui correspond au sens actuel d'un raisonnement déductif strict aboutissant à établir la vérité d'une proposition.
Le verbe **prouver** vient du latin *probare* signifiant « trouver bon, approuver » mais aussi « rendre croyable, démontrer », il donne le mot **preuve** qui désigne ce qui est susceptible d'établir la réalité, la vérité d'une chose, spécialement dans un contexte juridique.

Règles pour les démonstrations en mathématiques

R1 Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. C'est ce que l'on appelle la **valeur de vérité** de l'énoncé.

R2 Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai.

R3 Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit à prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé un **contre-exemple**.

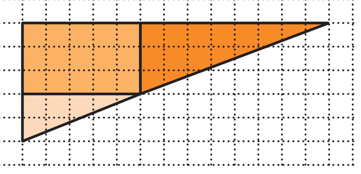
R4 Une constatation ou une mesure sur un dessin ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

Exemple 1. Considérons l'énoncé mathématique :

« Un nombre qui se termine par 3 est divisible par 3 ».

D'après **R1** cet énoncé est soit vrai soit faux, mais pas les deux en même temps !
On remarque que 3, 33 et 63 se terminent par 3 et sont divisibles par 3 mais d'après **R2** ces exemples ne suffisent pas à prouver que l'énoncé est vrai.
En revanche, 13 se termine par 3 mais n'est pas divisible par 3 et d'après **R3** cela prouve que l'énoncé est FAUX – c'est un contre-exemple –.

Exemple 2. Un élève affirme : « L'aire de la figure est $\dfrac{5\times 13}{2} = 32,5$ ».



Or quand on calcule la somme des aires des trois figures colorées on obtient : $\dfrac{2\times 5}{2} + 3\times 5 + \dfrac{3\times 8}{2} = 32$.
C'est une illustration de la règle **R4** car dans son calcul, l'élève considère que la figure est un triangle ce qui n'est pas le cas – on peut le prouver –.

Conjecture

On appelle **conjecture** un énoncé mathématique dont la valeur de vérité n'est pas connue.

Explication : Le mot **conjecture** vient du latin *conjectura*, dérivé de *conjicere* signifiant « jeter ensemble » qui prend ensuite le sens de « combiner dans l'esprit, présumer ».

Pour déterminer la valeur de vérité d'une conjecture il faut :
- soit construire un **contre-exemple**, auquel cas on conclut que la **conjecture est fausse** (**R3**) ;
- soit construire une **preuve**, auquel cas on conclut que la **conjecture est vraie**.

2 Théorème

Théorème/proposition

- Un **théorème** est un énoncé mathématique vrai (en tout cas, démontré comme tel).
- Une **proposition** désigne souvent un théorème intermédiaire ou de moindre importance.

Explication : Le mot **théorème** vient du grec *theorêma* signifiant « ce que l'on peut contempler », « objet d'étude ».
Le mot **proposition** vient du latin *propositio* lui même issu de *proponere* signifiant « action de mettre sous les yeux, de présenter ». Au 13^{e} siècle, une proposition est ce que l'on soumet au consentement. C'est au 17^{e} siècle que le mot devient, en mathématiques, l'énoncé d'une vérité à démontrer.

En général, un théorème peut s'énoncer sous plusieurs formes équivalentes :

- « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B* » ;
- « *Toutes les situations qui vérifient la condition A vérifient aussi la condition B* » ;
- « *La condition A* ***implique*** *la condition B* ».

Méthode **pour utiliser un théorème**, il faut avoir une situation où la condition A est vérifiée.

Exemple 3. Le théorème « ***Si*** *un nombre entier se termine par* 0 ***alors*** *il est divisible par* 5. » signifie que « *Tous les nombres entiers qui se terminent par* 0 *sont divisibles par* 5. ».

Par exemple, **comme** le nombre 560 se termine par 0, **on en conclut que** 560 est divisible par 5.

Méthode **pour prouver « *Si on a la condition A alors on a la condition B* ».**
Un raisonnement direct permet de conclure en supposant que l'on a la condition A, on démontre en utilisant les propositions connues que l'on a la condition B.

3 Contraposée, réciproque

Avec un théorème de la forme « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B.* », on peut lui associer deux autres énoncés :

- sa **contraposée** : « ***Si*** *on n'a pas la condition B* ***alors*** *on n'a pas la condition A* ».

  Remarque : La contraposée d'un théorème est toujours vraie.

  Démonstration : On a le théorème : « ***Si*** *on a la condition A* ***alors*** *on a la condition B* ».
  On considère que l'on n'a pas la condition B.

  Raisonnons par l'absurde *en supposant que l'on a la condition A*. Le théorème permet de dire que l'on a alors la condition B. Or, d'après **R1**, on ne peut pas avoir la condition B et son contraire ensemble. Ce que l'on a supposé est donc faux et on peut conclure que l'on n'a pas la condition A.

  On a donc prouvé que « ***Si*** *on n'a pas la condition B* ***alors*** *on n'a pas la condition A* ».

- sa **réciproque** : « ***Si*** *on a la condition B* ***alors*** *on a la condition A* ».

  La réciproque d'un théorème n'est pas toujours vraie.

  Explication : Le mot **contraposée** apparaît en 1862 dans une traduction d'un ouvrage en allemand du philosophe Emmanuel Kant (1724–1804). Le mot **contraposition** est dérivé du mot position venant du latin *positio* et de *ponere* « placer, poser », avec le préfixe *contra-*.
  Le mot **réciproque** vient du latin *reciprocus* signifiant « qui va en arrière après avoir été en avant » ou « réfléchi ».

Exemple 4. L'énoncé « ***Si*** *un nombre entier se termine par* 0 ***alors*** *il est divisible par* 5. » est VRAI – c'est donc un théorème –.

Sa contraposée « ***Si*** *un nombre entier n'est pas divisible par* 5 ***alors*** *il ne se termine pas par* 0. » est VRAIE.

Sa réciproque « ***Si*** *un nombre entier est divisible par* 5 ***alors*** *il se termine par* 0. » est FAUSSE puisque 15 est divisible par 5 mais ne se termine pas par 0.

Exemple 5. L'énoncé « ***Si*** ABC *est un triangle rectangle en* C ***alors*** $AB^2 = AC^2 + CB^2$ » est VRAI – c'est le théorème de PYTHAGORE –.

Sa contraposée « ***Si*** $AB^2 \neq AC^2 + CB^2$ ***alors*** *le triangle* ABC *n'est pas rectangle en* C » est VRAIE.

Sa réciproque « ***Si*** $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ***alors*** *le triangle* ABC *est rectangle en* C » est VRAIE – c'est donc un théorème –.

4 Propriété caractéristique

On dit qu'une **propriété** d'un objet mathématique est **caractéristique** s'il est le seul objet à posséder cette propriété.
Remarque : Pour prouver qu'une propriété est caractéristique, on prouve que l'objet donné possède cette propriété et que **la réciproque est vraie**.

Exemple 6. La propriété « *Le nombre se termine par* 0 *ou* 5. » caractérise les multiples de 5, c'est une propriété caractéristique des multiples de 5.

En effet, si un nombre est multiple de 5 alors il se termine par 0 ou 5 et **réciproquement** si un nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5.

Il est naturel de donner un nom à un objet mathématique qui a un intérêt particulier. Pour cela, la **définition** doit déterminer parfaitement cet objet (sans ambiguïté).

Si la propriété caractéristique est prise comme définition alors la définition initiale devient une propriété caractéristique.

Exemple 7.

- En prenant comme **définition** « *On appelle triangle isocèle un triangle qui a deux côtés égaux.* », on a le **théorème** « *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.* » et sa **réciproque** « *Un triangle qui a deux angles égaux est isocèle.* ».

  Par conséquent, « *Avoir deux angles égaux* » est une propriété caractéristique du triangle isocèle.
- En prenant comme **définition** « *On appelle triangle isocèle un triangle qui a deux angles égaux.* », on démontre que « *Avoir deux côtés égaux* » est une propriété caractéristique du triangle isocèle.

Explication : Le mot **définition** vient du latin *definitio* signifiant « action de déterminer, de fixer ».

II Règles de déduction

Afin de prouver qu'un énoncé mathématique est vrai, les mathématiciens ont élaboré une démarche spécifique : la **démonstration**.
Dans une démonstration, toute affirmation est soit une **donnée**, soit une **propriété**, soit la conséquence d'une propriété établie à partir de données et suivant des **règles de logique**.

Repères historiques. En 1662, Antoine Arnauld et Pierre Nicole considèrent que la logique est l'étude de l'art de penser.
Plusieurs œuvres d'Aristote (384–322 av. J.-C.) ont été regroupées sous le titre *Organon*, signifiant « instrument ». Il y expose les règles de déduction appelées « syllogismes ». Plus de deux mille ans après, Emmanuel Kant (1724–1804) pensait encore qu'Aristote avait découvert tout ce qui était à connaître en logique.
Les travaux de George Boole (1815–1864) et d'Augustus De Morgan (1806–1871) ont pour objectif de mathématiser la logique d'Aristote. Cette mathématisation se développe avec Gottlod Frege (1848–1925) et la création de langage formel. La logique est devenue une pierre angulaire de la philosophie et des mathématiques, et plus récemment elle l'est aussi devenue pour la linguistique et l'informatique.

1 Raisonnement direct

Le schéma du **raisonnement direct** ou *modus ponens* (règle du détachement) est le suivant :

*Sachant que l'*énoncé 1 *est vrai et que l'on a la propriété* « énoncé 1 *implique* énoncé 2 », *on déduit que l'*énoncé 2 *est vrai.*

En général l'énoncé « énoncé 1 *implique* énoncé 2 » est un théorème (ou proposition) exprimé sous la forme « ***si*** énoncé 1 ***alors*** énoncé 2 ».

Exemple 8. Soient A et B deux points d'un cercle. On va prouver que le centre du cercle appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Comme les points A et B appartiennent au cercle de centre O alors par définition du cercle on a $OA = OB$. Puis en utilisant le théorème : « *Si $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$* », on en déduit que le point O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

2 Raisonnement par l'absurde

Le schéma du **raisonnement par l'absurde** est le suivant :

*Supposons que l'*énoncé 1 *est faux.* *On trouve une contradiction,* *on en déduit que l'*énoncé 1 *est vrai.*

Exemple 9. On suppose connu le théorème 1 : « *Il existe une unique droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point du plan* ». On va démontrer le théorème 2 : « *Lorsque deux droites distinctes sont perpendiculaires à une même troisième droite, elles sont parallèles entre elles* ».

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes perpendiculaires à une même droite Δ.

Raisonnons par l'absurde *en supposant que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point M.*

Par conséquent, il passe par le point M deux droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ perpendiculaires à Δ. C'est impossible car, d'après le théorème 1, il ne passe par le point M qu'**une seule** droite perpendiculaire à Δ. Par conséquent, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes, elles sont donc parallèles.

3 Raisonnement par contraposée

Méthode **pour prouver qu'un énoncé est faux.** On peut utiliser la contraposée d'un théorème.

Exemple 10. On va prouver que le triangle ABC tel que $AB = 9$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 5$ cm n'est pas constructible.
On a le théorème (inégalité triangulaire) : « ***Si*** *ABC est un triangle* ***alors*** $AB < AC + BC$ ».
Sa contraposée est : « ***Si*** $AB \geqslant AC + BC$ ***alors*** *le triangle ABC n'est pas constructible* ».
Or comme $AC + BC = 8$ et $AB = 9$ alors l'énoncé « $AB \geqslant AC + BC$ » est vrai donc d'après la contraposée, il n'est pas possible de construire un tel triangle.

4 Raisonnement par disjonction des cas

Le schéma du **raisonnement par disjonction des cas** est le suivant :

On a deux possibilités : ou bien le cas A, ou bien le cas B. *Or du cas A on déduit que l'*énoncé 1 *est vrai et du cas B on déduit que l'*énoncé 1 *est vrai,* *par conséquent, l'*énoncé 1 *est toujours vrai. .*

Exemple 11. On va prouver que pour tout nombre entier n, le nombre $(n+5)(3n+2)$ est pair.
Le nombre n est ou bien pair, ou bien impair. Distinguons ces deux cas :
- Cas n pair. On a donc $3n$ pair puis $(3n+2)$ est pair. Par conséquent, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.
- Cas n impair. On a $(n+5)$ pair. Par conséquent, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit $(n+5)(3n+2)$ est pair.

Remarque : Si un algorithme permet de valider une propriété dans tous les cas possibles – un nombre de cas fini – cet algorithme peut servir de preuve.

Exemple 12. Afin de prouver l'énoncé « *Tout nombre impair compris entre* 5 *et* 99 *est la somme d'une puissance de* 2 *et d'un nombre premier* », il est possible de réaliser un programme qui teste si une telle décomposition est possible pour tous les nombres impairs entre 5 et 99.

5 Mots utilisés dans un énoncé

Mot	Commentaires
Soit	On l'utilise pour présenter des objets. Par exemple, l'énoncé « Soit ABC un triangle. » signifie que l'on considère un triangle que l'on appelle ABC. On peut le mettre au pluriel quand il y a plusieurs objets. Par exemple : « Soient (d_1) et (d_2) deux droites ».
Construire	On demande une figure précise avec les instruments de géométrie. On peut aussi utiliser **représenter** ou **tracer**. Si on souhaite une figure moins précise, on utilise **dessiner**.
Vérifier que	On demande de montrer qu'un énoncé est vrai pour des cas particuliers.
Conjecturer	On attend un énoncé qui semble vrai.
Démontrer	On attend un raisonnement construit à l'aide de propositions. Synonyme : **prouver que** ou **justifier que**.
En déduire que	On démontre l'énoncé à l'aide de résultats obtenus précédemment.
Calculer	Il faut mettre en valeur les techniques de calcul pour obtenir le résultat.
Résoudre	Utilisé pour les équations.

III Exercices

Ex 1 ☆☆★☆ **Les chats de concours**

45 chats participent à un concours, 27 des chats sont rayés et 32 ont une oreille noire. Seuls les chats rayés avec une oreille noire sont retenus pour la finale.
Combien de finalistes y a-t-il au minimum ?

Ex 2 ☆☆★☆ **Dans la rue...**

Ixe habite dans une rue du côté des numéros impairs (il n'y a pas de numéro bis). Sa maison porte le numéro 167. Si la numérotation commençait par l'autre bout de la rue, sa maison porterait le numéro 49.
Combien y a-t-il de maisons dans la rue de Ixe, du côté de la sienne ?

Ex 3 ☆☆★★ **Cryptarithmes**

Dans les opérations suivantes, chaque lettre représente un chiffre à déterminer, deux lettres différentes représentent des chiffres différents, le premier chiffre d'un nombre n'est jamais égal à zéro.

1)

		M	A	N	G	E	R
+		M	A	N	G	E	R
	G	R	O	S	S	I	R

2)

		K	I	L	O
+		K	I	L	O
	T	O	N	N	E

Ex 4 ☆☆★☆ **Divisibilité**

1) Donner la définition de n est multiple de 3.

2) Démontrer l'énoncé : « *Si n est un multiple de 3 alors n^2 est un multiple de 3* ».

3) Que peut-on penser de la conjecture : « *Si deux nombres ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas multiple de 3* ».

Ex 5 ☆☆★☆ **Divisibilité**

On considère l'énoncé mathématique : « *Si un nombre est divisible par 4 et par 6 alors il est toujours divisible par 24* ».
Voici les réponses de deux élèves :

Zed : J'ai essayé avec 48. 48 est divisible par 4 et 48 est divisible par 6, il est bien divisible par 24. J'ai essayé avec 72. 72 est divisible par 4 et 72 est divisible par 6, il est bien divisible par 24. C'est donc vrai.

Ixe : C'est des fois vrai, des fois faux. Avec 48 c'est vrai. Mais avec 12 c'est faux car 12 est divisible par 4 et par 6 et pourtant il n'est pas divisible par 24.

Qui a raison, qui a tort ? Justifier la réponse.

Ex 6 ☆☆★☆ **Forme des nombres**

On donne la définition suivante : « *n est de la forme $6k+5$ s'il existe un entier k tel que $n = 6k+5$* ».

1) Prouver que : « *si n est de la forme $6k+5$ alors il est de la forme $3k-1$* ».
Prouver que la réciproque n'est pas vraie.

2) Prouver que le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k+1$ mais jamais de la forme $3k+2$.

Ex 7 ☆☆★☆ **Conjectures**

Pour chacun des énoncés, justifier s'il est vrai ou faux.

1) *Un nombre qui se termine par 7 est un nombre premier.*

2) *La somme de deux fractions inférieures à 1 reste inférieure à 1.*

3) *Pour tout entier n non nul, $\dfrac{2^n}{1000} < 1000 \times n^2$.*

4) *Le nombre $(n-1)n(n+1)+n$ peut s'exprimer sous la forme d'un cube.*

5) *Il existe un nombre entier n tel que le nombre $5n+26$ est un multiple de 5.*

6) *Pour tout nombre entier n, le nombre $7n+14$ est un multiple de 7.*

7) *Pour tout nombre entier a multiple de 2, pour tout nombre entier b multiple de 3, le nombre $a+b$ est un multiple de 5.*

Ex 8 ☆☆★☆ **Conjectures**

Pour chacun des énoncés, justifier s'il est vrai ou faux.

1) *Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2 = x^2-8x+16$.*

2) *Pour tout nombre x, $(x+4)^2 = x^2-8x+16$.*

3) *Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2 = x^2+1$.*

4) *Pour tout nombre x, $(x+2)(2-x) = x^2-4$*

5) *Il existe un nombre x tel que $(x+2)(2-x) = x^2-4$.*

6) *Pour tout nombre x, x^2+2x est toujours positif.*

7) *Le carré de n'importe quel nombre est toujours positif.*

Ex 9 ☆☆★☆

Pour chacun des énoncés, dire s'il est vrai ou faux.
Citer sa réciproque, sa contraposée et dire si celles-ci sont vraies ou fausses.

1) *Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.*

2) *Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.*

3) *Si un point est équidistant des deux extrémités d'un segment alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.*

4) *Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de la même longueur alors c'est un losange.*

5) *Si deux nombres entiers sont consécutifs alors leur somme est impaire.*

Ex 10 ☆☆★☆ Propriété caractéristique

1) Donner une définition d'un losange. Énoncer une propriété caractéristique.

2) Donner une définition d'un rectangle. Énoncer une propriété caractéristique.

Ex 11 ☆☆★★ Angles

On considère la liste de théorèmes :

Th1 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont adjacents, alors $\widehat{xAz} = \widehat{xAy} + \widehat{yAz}$.*

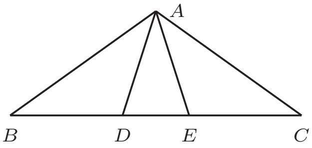
Th2 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont supplémentaires, alors $\widehat{xAy} = 180° - \widehat{yAz}$.*

Th3 : *Dans un triangle, la somme des angles est $180°$.*

Th4 : *Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux.*

Th5 : *Si deux angles d'un triangle sont égaux, alors le triangle est isocéle.*

Dans la figure, le triangle ABC est isocèle de sommet principal A et $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC} = 36°$.



Démontrer, en indiquant pour chaque étape le théorème utilisé, que le triangle ABD est isocèle, puis que le triangle ADE est isocèle.

Ex 12 ★☆★★ Triangle isocèle

On considère les définitions et théorèmes suivants.

Def1 : *Un triangle est dit **isocèle** s'il possède deux côtés égaux*

Def2 : *On appelle **hauteur** d'un triangle la droite passant par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.*

Def3 : *On appelle **médiane** d'un triangle la droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.*

Th1 : *Cas d'égalité des triangles* CCC

Th2 : *Cas d'égalité des triangles* CAC

Th3 : *Cas d'égalité des triangles* ACA [1]

Th4 : *Si un triangle est isocèle alors les angles à la base sont égaux.*

Th5 : *Si deux angles d'un triangle sont égaux alors le triangle est isocéle.*

Th6 : *Dans un triangle, la somme des angles est $180°$.*

1) Démontrer que dans un triangle isocèle la hauteur et la médiane issues du sommet principal sont confondues.
Réciproquement, prouver que si dans un triangle une hauteur est aussi médiane alors ce triangle est isocèle.

2) Prouver qu'une propriété caractéristique d'un triangle équilatéral est que l'orthocentre soit confondu avec le centre de gravité.

3) Démontrer que dans un triangle isocèle les hauteurs issues des extrémités de la base sont égales. Démontrer que la réciproque est vraie.

Ex 13 ☆☆★★ Carrés

Déterminer, en justifiant, si les nombres suivants sont des carrés de nombres entiers.

$A = 3\ 195\ 671\ 765\ 913$

$B = 1\ 234\ 567\ 654\ 321$

$C = 2\ 483\ 979\ 248\ 397$

Ex 14 ☆☆★★ Unités

Déterminer le chiffre des unités de 2^{50}.

Ex 15 ☆☆★☆ Les cravates

Messieurs Lebleu, Lerouge et Levert mangent ensemble au restaurant. Tous portent des cravates de couleur.
L'un porte une cravate bleue, l'autre porte une cravate rouge et le dernier porte une cravate verte.
Soudain l'homme portant la cravate verte s'écrie : « *Réalisez-vous que chacun porte une cravate de la même couleur que nos noms mais personne ne porte une cravate semblable à son nom ?* »
« *C'est curieux* », s'exclame monsieur Lebleu.
Quelle couleur de cravate porte chaque homme ?

Ex 16 ☆☆★★ Système cohérent

Les quatre phrases suivantes forment un système logique cohérent.

A : Aucune des phrases n'est vraie.

B : Une seule des phrases est fausse.

C : Deux exactement des phrases sont vraies.

D : Deux au moins des phrases sont fausses.

Combien y-a-t-il de phrases vraies ?

1. Pour les trois cas d'égalité des triangles – cas côté-côté-côté (CCC), cas côté-angle-côté (CAC) et cas angle-côté-angle (ACA) – voir le cours de cinquième ou *rappels de géométrie* de ce cours.