PHYSIQUE

Électrostatique
Magnétostatique

Résumé
de cours

LICENCE
BUT

Exercices
corrigés

Pascal **Clavier**

ellipses

Chapitre 1

Champ et potentiel électrostatiques

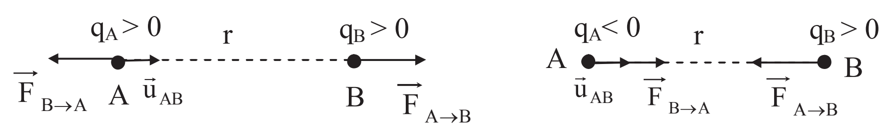
A. Loi de Coulomb

Deux points matériels A et B, dans le vide, séparés de la distance r, portent respectivement des charges q_A et q_B.
Le point B est soumis à une force $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ exercée par A, de même le point A est soumis à une force $\overrightarrow{F}_{B\to A}$ exercée par B.
La force $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ est donnée par la loi de Coulomb :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u}_{AB}}$$

où $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ \text{m.F}^{-1}$ est une constante, ε_0 est la permittivité du vide et $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire orientant la droite AB.
Du fait du principe des actions réciproques :

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}$$



On peut faire l'analogie entre les forces de gravitation et les forces électriques : ces deux forces sont inversement proportionnelles au carré de la distance. La grande différence réside dans le fait que la force de gravitation est toujours attractive, alors que la force électrique est répulsive ou attractive.
Dans le cas d'un milieu diélectrique parfait, on remplace ε_0 par la constante absolue du milieu $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ où ε_r est la permittivité relative.

B. Champ électrique

1. Expression

Soit une charge Q, dans le vide, et une charge q en un point P de l'espace situé à la distance r de Q. La force exercée par la charge Q sur la charge q s'exprime par :

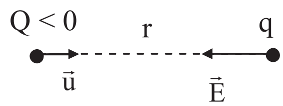
$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}$$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de Q vers q.
Cette expression peut s'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\vec{E}}$$

où $\vec{E}$ représente le champ électrique créé par la charge Q.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}}$$



La charge Q est la charge source du champ $\vec{E}$. Le champ n'est pas défini sur la charge (en r = 0).
Le champ ne dépend pas de la charge placée au point P.
L'unité du champ électrique est le volt par mètre ($V.m^{-1}$).

2. Lignes de champ

Une ligne de champ est une ligne qui en chacun de ses points est tangente au vecteur champ, d'où $\vec{E} \wedge \overrightarrow{d\ell} = \vec{0}$.
Une ligne de champ ne peut pas être fermée sur elle-même.

3. Champ créé par plusieurs charges

Deux charges Q_1 et Q_2 créent respectivement en un point P de l'espace des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.
Le champ résultant $\vec{E}$ vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

On peut ainsi généraliser à n charges, c'est le principe de superposition.

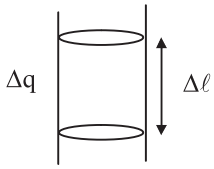
$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{E}_i}$$

4. Distributions continues de charges

Pour les calculs de champ, il est nécessaire de faire intervenir la notion de densité de charge.

9782340-085329_001_272.indd 4 15/01/2024 15:08

a) Densité linéique λ



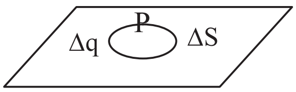
La densité linéique correspond à la limite du rapport Δq sur Δℓ lorsque Δℓ tend vers 0.

$\lambda = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0}\left(\dfrac{\Delta q}{\Delta \ell}\right) = \dfrac{dq}{d\ell}$. Pour une distribution finie :

$$\boxed{q = \int \lambda . d\ell}$$

b) Densité surfacique σ

Soit un élément de surface ΔS entourant un point P et soit Δq la charge portée par cet élément.



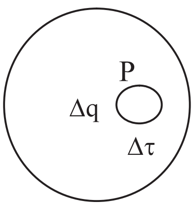
La densité surfacique de charge est définie par :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\Delta q}{\Delta S}\right) = \frac{dq}{dS}$$

Pour une distribution finie :

$$\boxed{q = \iint_S \sigma dS}$$

c) Densité volumique ρ



Soit un élément de volume Δτ englobant un point P et soit Δq la charge portée par cet élément. La densité volumique de charge est définie par :

$$\rho = \lim_{\Delta \tau \to 0}\left(\frac{\Delta q}{\Delta \tau}\right) = \frac{dq}{d\tau}$$

Pour une distribution finie :

$$\boxed{q = \iiint_\tau \rho d\tau}$$

Si la distribution est homogène, la densité de charges est uniforme.

C. Le potentiel électrostatique

1. Charge ponctuelle

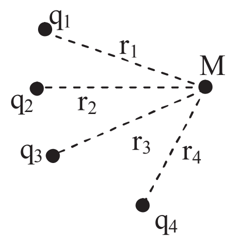
Soit une charge ponctuelle q, immobile en point O. En un point M distant de r, il existe un potentiel créé en ce point par la charge q :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + cte}$$

Le potentiel est défini à une constante (cte) près. Il n'est pas défini au point O. S'il n'existe pas de charges à l'infini ($r \to \infty$) la constante est nulle, d'où :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

2. Ensemble de charges ponctuelles



Le potentiel créé au point M par un ensemble de charges est la somme des potentiels créés par chaque charge.

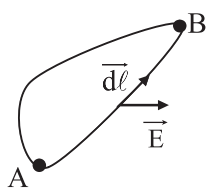
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right] + cte$$

Résultat que l'on peut généraliser à :

$$\boxed{V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} + cte}$$

Si la distribution est finie, et s'il n'y a pas de charges à l'infini, la constante est nulle.

3. Circulation de $\vec{E}$



La circulation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ est définie par :

$$\boxed{C = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}}$$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B$$

La circulation de $\vec{E}$ entre deux points A et B est égale à la différence de potentiel entre ces deux points. Elle ne dépend pas du chemin suivi.

On peut écrire la relation intégrale :

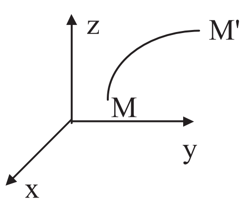
$$\boxed{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}}$$

Le long d'une courbe fermée :

$$\boxed{C = \oint \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = 0}$$

On en déduit que le champ est à circulation conservative.

Relation locale



Notion de gradient

Le point M a pour coordonnées x, y et z. Le point M' qui est très proche a pour coordonnées x + dx, y + dy et z + dz.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{d\ell}\left|\begin{matrix} dx \\ dy \\ dz \end{matrix}\right.$$

Soit la fonction scalaire U(x, y, z), sa différentielle totale s'écrit :

9782340-085329_001_272.indd 6 15/01/2024 15:08

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

En faisant intervenir l'opérateur vectoriel gradient noté :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

on constate que la différentielle dU peut alors s'écrire :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}}\,U.\overrightarrow{d\ell}$$

Du point de vue géométrique, $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est normal à la surface d'équation :

$$U(x, y, z) = \text{cte}.$$

En reprenant la relation intégrale et en faisant intervenir le gradient, on peut écrire :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\ V.\overrightarrow{d\ell} = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V}$$

On en tire que :

– le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants ;
– le champ $\vec{E}$ est normal aux surfaces équipotentielles (V = cte) ;
– les lignes de champ et les surfaces équipotentielles sont orthogonales.

D. Notion de symétrie. Angle solide

1. Symétries

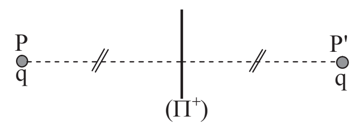
– *Principe de Curie*

Si une source (effets) du champ électrostatique présente des propriétés de symétrie, le champ et le potentiel (causes) présentent alors aussi ces propriétés.

– *Plan de symétrie*

Une distribution de charges admet un plan de symétrie (ou symétrie positive Π^+) si par rapport à ce plan la répartition géométrique des charges reste conservée et si le signe des charges reste inchangée.

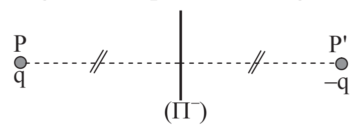
Le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution appartient à ce plan.



– *Plan d'antisymétrie*

Une distribution de charges admet un plan d'antisymétrie (ou plan de symétrie négative Π^-) si par rapport à ce plan la répartition géométrique des charges est conservée et si le signe des charges est changé.

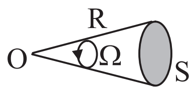
Le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution est alors perpendiculaire au plan d'antisymétrie.



– *Invariance*
– Si une distribution de charges est invariante par translation le long d'un axe (Ox, par exemple) le champ et le potentiel ne dépendent alors pas de la variable considérée (x ici).
– Si la distribution est invariante par rotation d'un angle θ autour d'un axe, le champ et le potentiel ne dépendent alors pas de la variable θ.

2. Angle solide

La surface S, est la surface "vue" depuis le point O sous l'angle solide Ω.

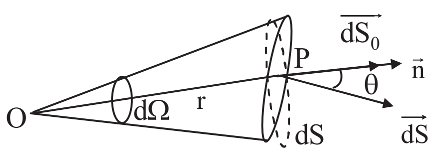


$$\boxed{\Omega = \frac{S}{R^2}}$$ exprimé en stéradian.

Si depuis le point O, on regarde une sphère de surface Σ, de rayon unité on a :

$$\Omega = 4\pi.$$

3. Angle solide élémentaire

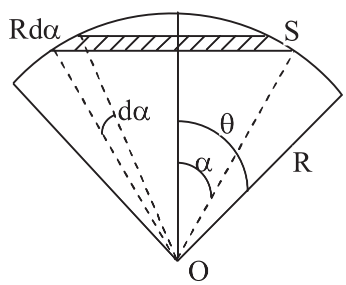


La surface dS est vue sous l'angle dΩ.
dS_0 est l'élément de surface qui appartient à la sphère de centre O et de rayon r, d'où :

$$dS_0 = dS\cos\theta$$

Par définition : $d\Omega = \dfrac{dS_0}{r^2}$: $\boxed{d\Omega = \dfrac{dS\cos\theta}{r^2} \quad \text{ou} \quad d\Omega = \dfrac{\overrightarrow{dS}.\vec{n}}{r^2}}$

– Exemple : cône de révolution



La surface de la calotte sphérique (aire hachurée) interceptée vaut :

$$S = \iint dS = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\theta} 2\pi R \sin\alpha d\alpha$$

$$S = 2\pi R^2(1-\cos\theta)$$

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \Rightarrow \boxed{\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)}$$

On retrouve bien pour le demi-espace (θ = π/2) Ω = 2π et pour l'espace complet (θ = π) Ω = 4π.

Enoncés des exercices

Exercice 1

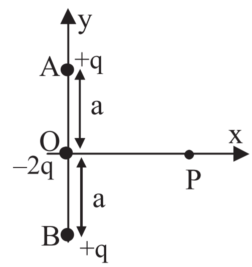
1. On place quatre charges ponctuelles ($q_A = q_B = q_C = q_D = q > 0$) aux sommets d'un carré ABCD de côté a = 10 cm et de centre O.

a) Calculer le champ $\vec{E}_O$ et le potentiel $V_{(O)}$ au point O.

b) Même question pour un point M placé sur l'axe Oz perpendiculaire à la surface du carré.

c) Même question pour un point N placé au milieu du côté AB.

2. Deux charges ponctuelles A et B portant chacune la charge positive q, sont disposées sur un axe y'Oy symétriquement par rapport à l'origine O, elles sont séparées d'une distance 2a. Une troisième charge (–2q) considérée comme ponctuelle se trouve au point O.



Déterminer l'expression du vecteur champ $\vec{E}_p$ et du potentiel V_p créé au point P de l'axe Ox d'abscisse x positive.

3. Une distribution de charges à symétrie sphérique autour d'un point O créé en un point M quelconque de l'espace situé à une distance OM = r de O un potentiel de la forme : $V_{(r)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-r/a_0)$ où a_0 et q sont des constantes positives.

Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ au point M.

Exercice 2

1. Déterminer le champ électrostatique et le potentiel créés par un fil rectiligne infini portant une densité linéique de charge λ en un point M situé à la distance r du fil.

2. Déterminer le champ électrostatique créé par un fil d'axe z'Oz de longueur 2a et de charge linéique λ ($\lambda > 0$), en un point M porté par l'axe Ox, O étant le milieu du fil, l'axe Ox étant perpendiculaire au fil.

Exercice 3

Soit une spire de centre O et de rayon r placée dans le plan xOy portant une charge linéique λ.

1. Déterminer le champ et le potentiel électrostatique en un point M de l'axe z'Oz.

2. Représenter le graphe du champ électrostatique.

Exercice 4

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}_z$ et le potentiel V_z créé par un disque de centre O et de rayon r portant une densité de charge $\sigma > 0$ en un point de l'axe z'Oz perpendiculaire au plan du disque.
2. Représenter l'allure du graphe de E_z et V_z.

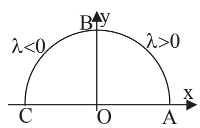
Exercice 5

1. Calculer le champ créé par un plan infini portant une densité de charge $\sigma > 0$:
   – par un calcul direct ;
   – en utilisant la notion d'angle solide.
2. Calculer le potentiel électrostatique.

Partiel (120 min, 20 pts)

Exercice 1

1. Soit un fil non conducteur formé en un arc de cercle de rayon R et de centre O, vu du point O avec un angle de 2α, il est chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$. Déterminer le champ au point O.
2. On considère un fil non conducteur, sous forme d'un demi-cercle de rayon R, constitué de deux portions de densité linéique $\lambda = \pm\lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) pour la portion AB $\lambda > 0$ pour la portion BC $\lambda < 0$.



   Calculer le champ électrostatique créés par le fil au point O.

Exercice 2

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

I. Plan infini

Soit un plan infini, noté (P_1), orthogonal à l'axe Ox, d'équation $x = +a$ ($a > 0$) et chargé positivement avec une densité surfacique de charge $+\sigma$. En tout point M(x, y, z) de l'espace pour lequel $x > +a$ [demi-espace noté (I)], le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, créé par le plan (P_1), s'écrit : $\vec{E}(M) = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x$, avec ε_0 la permittivité absolue du vide (figure 1).

Donner sans calcul, mais en la justifiant, l'expression vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point du demi-espace (II), pour lequel $x < +a$.