Terminale Spécialité

PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES

Cours rigoureux avec démonstrations et exercices corrigés

Cours clair, rigoureux et complet

Démonstrations détaillées

Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Chlomo Khalifa

ellipses

Chapitre 1

Suites

1.1 Raisonnement par récurrence

On utilise le raisonnement par récurrence lorsque l'on cherche à démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

1.1.1 Principe

Théorème 1.1. Principe de récurrence (admis)
Soit une propriété qui dépend d'un entier naturel n, notée $\mathcal{P}(n)$, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si l'on démontre les deux propriétés suivantes :

— $\mathcal{P}(n_0)$ *(initialisation) ;*

— *pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ (hérédité),*

alors pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque. Le principe de récurrence peut être schématisé de la façon suivante. On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. Les deux conditions permettant de s'assurer que tous les dominos tombent sont :

— le premier domino tombe (initialisation) ;

— si un domino quelconque tombe, il renverse le domino suivant (hérédité).

Remarque.

1. Dans l'hérédité, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (cette hypothèse s'appelle **l'hypothèse de récurrence**), et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie. Formellement, l'hérédité consiste à montrer la propriété suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)).$$

2. Une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui vérifie l'étape de l'hérédité est dite **héréditaire** à partir du rang n_0 car sa véracité se transmet du rang n à son « héritier » de rang $n+1$.

La section suivante propose deux exemples d'application du raisonnement par récurrence. On prêtera une attention particulière à la rédaction.

1.1.2 Exemples

Exemple. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (n+1)^2$.
Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n = (n+1)^2$ ».

— Initialisation. On a d'une part : $u_0 = 1$, et d'autre part : $(0+1)^2 = 1$, donc $u_0 = (0+1)^2$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n = (n+1)^2$ (c'est l'hypothèse de récurrence, en abrégé H.R.). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = (n+2)^2$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{par H.R.} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion. On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2.$$

On souhaite démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.
Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

— Initialisation. On a d'une part : $u_0 = 2$, et d'autre part : $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3$, donc $u_0 \leq u_1$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \leq u_{n+1}$, donc : $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1}$, et donc : $\frac{1}{2}u_n + 2 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 2$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion. On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque. Notons qu'au début du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est écrite entre guillemets car c'est une propriété qui reste à démontrer. A ce stade, on ignore si elle est vraie.

Attention !

Dans un raisonnement par récurrence, l'initialisation est indispensable ! En effet, une propriété uniquement héréditaire peut être fausse. Par exemple, la propriété « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire, mais elle n'est jamais vraie !

Attention !

Il existe deux erreurs fréquentes de rédaction dans l'hérédité.

1. **Commencer l'hérédité par la phrase : « Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie » est une erreur fondamentale !** Si l'on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il n'y a plus rien à prouver...
2. **Débuter l'hérédité par les phrases : « Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie... » ou « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n... » est une erreur plus subtile.** En effet, dans ce cas, on montre uniquement la propriété : $\exists n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$.

Pour éviter toute erreur, il est conseillé de commencer l'hérédité par la formulation : « Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie... ».

Application 1. *Les deux questions de cette application sont indépendantes.*

1. On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{0,5u_n^2 + 8}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

1.1.3 Inégalité de Bernoulli

Propriété 1.2. Inégalité de Bernoulli
Soit a un réel positif. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Démonstration. Soit a un réel positif. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $(1+a)^n \geq 1+na$ ».
Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

— Initialisation. On a d'une part : $(1+a)^0 = 1$ et d'autre part : $1+0\times a = 1$, donc $(1+a)^0 = 1+0\times a$, et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $(1+a)^n \geq 1+na$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$. Par hypothèse de récurrence, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$, donc : $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$ car $1+a>0$, soit : $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$, soit : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$, donc : $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ car $na^2 \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion. On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

□

1.2 Limite de suite

1.2.1 Limite infinie

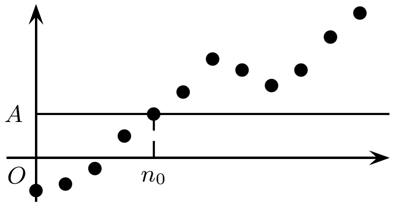
Définition 1.3. *1. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si pour tout réel $A>0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n > A$.*

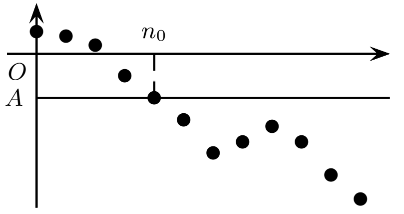
2. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si pour tout réel $A<0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n < A$.

Remarque. Autrement dit :

— une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque pour tout réel $A>0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 ;

— une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque pour tout réel $A<0$, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.





De manière vulgarisée, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si le terme u_n est aussi grand que l'on veut lorsque n est suffisamment grand, et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si le terme u_n est aussi grand que l'on veut dans les négatifs lorsque n est suffisamment grand.

On donne ci-dessous les limites infinies de quelques suites usuelles.

Propriété 1.4. Suites de référence de limite infinie (1)

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
3. *Plus généralement, pour tout entier* $k \geq 1$, *on a :* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$.
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Démonstration ♠. Soit un réel $A > 0$.

1. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$ on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.
2. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > A \iff n > \sqrt{A}$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$, on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.
3. Cette limite est admise.
4. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > A \iff n > A^2$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$, on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.

□

On peut montrer de manière analogue les limites infinies suivantes.

Propriété 1.5. Suites de référence de limite infinie (2)

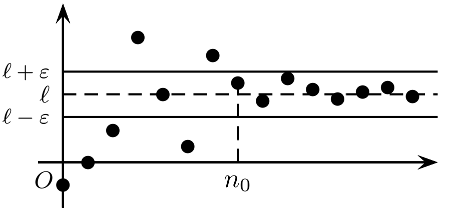
1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$
3. *Plus généralement, pour tout entier* $k \geq 1$, *on a :* $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^k) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

Application 2 ♠. En utilisant la définition, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n + 6) = +\infty$.

1.2.2 Limite finie

Définition 1.6. *On dit qu'une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.*

Remarque. Autrement dit, une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.



De manière vulgarisée, une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ si le terme u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ lorsque n est suffisamment grand, c'est-à-dire si les termes de la suite (u_n) finissent pas s'accumuler autour de ℓ.

Propriété 1.7. Unicité de la limite
Si une suite a pour limite un réel, ce réel est unique.

Démonstration ♠. Supposons qu'une suite (u_n) a pour limites deux réels ℓ_1 et ℓ_2, et montrons alors que $\ell_1 = \ell_2$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$.
Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1| > 0$.
Puisque (u_n) a pour limite ℓ_1, il existe un entier N_1 tel que pour tout entier $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$.
Puisque (u_n) a pour limite ℓ_2, il existe un entier N_2 tel que pour tout entier $n \geq N_2$, $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$.
En posant $N = \max(N_1\,;\,N_2)$, on obtient pour tout $n \geq N$: $\begin{cases} |u_n - \ell_1| < \varepsilon \\ |u_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}$.
Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a :

$$|\ell_2 - \ell_1| = |\ell_2 - u_n + u_n - \ell_1| \leq \underbrace{|\ell_2 - u_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|,$$

ce qui est absurde. Donc $\ell_1 = \ell_2$ et ainsi la suite (u_n) a pour limite un unique réel. □

Remarque. On peut désormais noter licitement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ pour signifier qu'une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ.

On donne ci-dessous les limites nulles de quelques suites usuelles.

Propriété 1.8. Suites de référence de limite nulle

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

3. Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

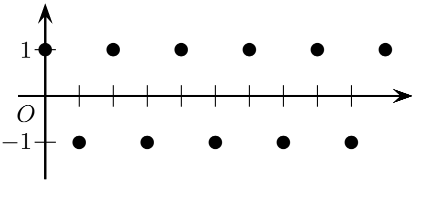
Démonstration ♠. Soit un réel $\varepsilon > 0$.

1. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| < \varepsilon \iff \left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \varepsilon$.
2. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$, on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \varepsilon$.
3. Cette limite est admise.
4. On note (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
   Ainsi, en posant $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$, on a bien, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \varepsilon$.

□

Remarque. Notons (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = (-1)^n$.

Tous les termes de la suite (t_n) valent soit 1 soit -1. Ils ne s'accumulent donc jamais définitivement près d'un réel. La suite (t_n) n'admet donc pas de limite (ni finie ni infinie).



Définition 1.9. 1. *Une suite est dite convergente si elle a une limite réelle.*

2. *Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si elle a une limite infinie ou n'a pas de limite.*

Application 3 ♠. En utilisant la définition, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5 + \dfrac{1}{n}\right) = 5$.

1.3 Règles opératoires sur les limites

Dans toute cette section, l'abréviation F.I. signifie « forme indéterminée ». Cette appellation est utilisée pour signifier que l'on ne peut pas conclure immédiatement sur la limite de la suite. Il s'agira alors, lorsque la limite existe, de lever l'indétermination en changeant habilement l'écriture (voir la sous-section 1.3.4).

1.3.1 Somme de limites

Propriété 1.10. Somme de limites (admise)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple. 1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) = +\infty$.
En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par somme de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) = +\infty$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}+4\right) = 4$.
En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$, donc par somme de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}+4\right) = 4$.

1.3.2 Produit de limites

Propriété 1.11. Produit de limites (admise)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple. 1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^3) = -\infty$.
En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2) = -2 < 0$, donc par produit de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^3) = -\infty$.