

Terminale Spécialité

PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES

Cours rigoureux avec démonstrations
et exercices corrigés

Cours clair, rigoureux
et complet

Démonstrations
détaillées

Exercices
d'entraînement
et d'approfondissement

Chlomo Khalifa



Table des matières

1	Suites	15
1.1	Raisonnement par récurrence	15
1.1.1	Principe	15
1.1.2	Exemples	16
1.1.3	Inégalité de Bernoulli	18
1.2	Limite de suite	18
1.2.1	Limite infinie	18
1.2.2	Limite finie	20
1.3	Règles opératoires sur les limites	22
1.3.1	Somme de limites	22
1.3.2	Produit de limites	22
1.3.3	Quotient de limites	23
1.3.4	Formes indéterminées	24
1.4	Limites et inégalités	27
1.4.1	Théorème de comparaison	27
1.4.2	Théorème des gendarmes	28
1.5	Suites majorées, minorées, bornées	29
1.5.1	Définitions	29
1.5.2	Convergence des suites monotones	30
1.6	Limite d'une suite géométrique	32
1.6.1	Limite de la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}$	32
1.6.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	34
1.7	Exercices	34
2	Limites de fonction	39
2.1	Limite en l'infini	39
2.1.1	Limite infinie en l'infini	39
2.1.2	Limite finie en l'infini et asymptote horizontale	40
2.2	Limite en un réel	42
2.2.1	Limite infinie en un réel et asymptote verticale	42
2.2.2	Limite finie en un réel	44
2.3	Règles opératoires sur les limites	45
2.3.1	Somme de limites	45
2.3.2	Produit de limites	46
2.3.3	Quotient de limites	47

2.3.4	Formes indéterminées	48
2.4	Limites et inégalités	50
2.4.1	Théorème de comparaison	50
2.4.2	Théorème des gendarmes	51
2.5	Fonction exponentielle et limites en l'infini	51
2.5.1	Limites de la fonction exponentielle	51
2.5.2	Croissances comparées	52
2.6	Exercices	54
3	Continuité	57
3.1	Notion de continuité	57
3.1.1	Définitions	57
3.1.2	Opérations et fonctions continues	57
3.1.3	Dérivation et continuité	60
3.2	Le théorème des valeurs intermédiaires	61
3.2.1	Cas général	61
3.2.2	Cas des fonctions strictement monotones	62
3.3	Fonctions continues et suites	64
3.4	Exercices	66
4	Complément de dérivation et convexité	71
4.1	Complément de dérivation	71
4.1.1	Fonctions composées	71
4.1.2	Dérivée d'une fonction composée	72
4.1.3	Dérivée seconde	73
4.2	Convexité	74
4.2.1	Définition	74
4.2.2	Caractérisations des fonctions convexes dérivables	74
4.2.3	Point d'inflexion	78
4.3	Exercices	80
5	Fonction logarithme népérien	87
5.1	La fonction logarithme népérien	87
5.1.1	Définition	87
5.1.2	Conséquences de la définition	88
5.1.3	Représentation graphique	88
5.2	Propriétés algébriques du logarithme	89
5.2.1	Relation fonctionnelle	89
5.2.2	Propriétés algébriques	89
5.3	Étude de la fonction logarithme népérien	91
5.3.1	Continuité et dérivabilité	91
5.3.2	Variations, équations et inéquations	92
5.3.3	Limites	94
5.3.4	Convexité	95
5.3.5	Dérivée de $\ln(u)$	96
5.4	Exercices	97

6 Fonctions trigonométriques	101
6.1 Rappels	101
6.2 Fonctions cosinus et sinus	102
6.2.1 Définitions	102
6.2.2 Continuité	102
6.2.3 Parité et périodicité	103
6.2.4 Signe	104
6.2.5 Résolution d'équations et d'inéquations	105
6.2.6 Limites	107
6.3 Dérivation et variations	109
6.3.1 Dérivation	109
6.3.2 Variations	111
6.3.3 Convexité	113
6.4 Exercices	114
7 Primitives et équations différentielles	117
7.1 Équation différentielle du premier ordre	117
7.2 Équation différentielle $y' = f$ et primitives	118
7.2.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	118
7.2.2 Primitives des fonctions usuelles et opérations	120
7.2.3 Primitives et composition	122
7.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$	124
7.3.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$	124
7.3.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$	125
7.3.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$	127
7.4 Exercices	129
8 Intégration	133
8.1 Intégrale et aire	133
8.1.1 Définition	133
8.1.2 Notation	134
8.2 Calcul d'intégrales	136
8.2.1 Théorème fondamental de l'analyse	136
8.2.2 Calcul d'intégrales	137
8.3 Propriétés des intégrales	140
8.3.1 Relation de Chasles	140
8.3.2 Linéarité	141
8.3.3 Positivité	142
8.3.4 Passage à l'intégrale dans les inégalités	143
8.3.5 Inégalité de la moyenne	144
8.3.6 Aire du domaine compris entre deux courbes	145
8.4 Intégration par parties	146
8.5 Exercices	147

9	Combinatoire et dénombrement	153
9.1	Cardinal d'ensembles finis	153
9.1.1	Ensemble fini et cardinal	153
9.1.2	Principe additif	153
9.1.3	Principe multiplicatif	155
9.2	Arrangements et permutations	158
9.2.1	Factorielle d'un entier naturel	158
9.2.2	Arrangements d'un ensemble	158
9.2.3	Permutations d'un ensemble	159
9.3	Combinaisons d'un ensemble fini	161
9.3.1	Parties d'un ensemble fini	161
9.3.2	Nombre de combinaisons	162
9.3.3	Propriétés des coefficients binomiaux	164
9.4	Exercices	168
10	Vecteurs, droites et plans de l'espace	171
10.1	Vecteurs de l'espace	171
10.1.1	Définitions et règles de calcul	171
10.1.2	Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement	176
10.2	Droites et plans de l'espace	177
10.2.1	Caractérisation vectorielle d'une droite	177
10.2.2	Caractérisation vectorielle d'un plan	179
10.2.3	Vecteurs coplanaires	180
10.3	Positions relatives de droites et de plans	182
10.3.1	Position relative de deux droites	182
10.3.2	Position relative d'une droite et d'un plan	183
10.3.3	Position relative de deux plans	186
10.4	Repérage dans l'espace	190
10.4.1	Base de l'espace	190
10.4.2	Repère de l'espace	192
10.4.3	Opérations sur les coordonnées	193
10.5	Exercices	196
11	Orthogonalité dans l'espace	201
11.1	Produit scalaire dans l'espace	201
11.1.1	Extension du produit scalaire à l'espace	201
11.1.2	Propriétés algébriques	202
11.2	Orthogonalité dans l'espace	205
11.2.1	Orthogonalité de deux vecteurs	205
11.2.2	Orthogonalité de deux droites	205
11.2.3	Orthogonalité d'un plan et d'une droite	207
11.3	Vecteur normal à un plan	208
11.3.1	Définitions	208
11.3.2	Propriétés	211
11.4	Projections orthogonales dans l'espace	213
11.4.1	Projeté orthogonal d'un point sur une droite	213
11.4.2	Projeté orthogonal d'un point sur un plan	215

11.5	Base orthonormée et repère orthonormé	216
11.5.1	Définitions	216
11.5.2	Propriétés	217
11.6	Exercices	218
12	Représentations paramétriques et équations cartésiennes	225
12.1	Représentations paramétriques d'une droite	225
12.2	Équations cartésiennes d'un plan	227
12.3	Système d'équations linéaires	230
12.3.1	Déterminer l'intersection de deux droites	230
12.3.2	Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan	231
12.3.3	Déterminer l'intersection de deux plans	233
12.3.4	Déterminer le projeté orthogonal d'un point	234
12.4	Exercices	236
13	Sommes de variables aléatoires	241
13.1	Rappels	241
13.1.1	Variable aléatoire et loi de probabilité	241
13.1.2	Espérance et variance d'une variable aléatoire	242
13.1.3	Variable aléatoire $aX + b$	244
13.2	Somme de variables aléatoires	246
13.2.1	Définition	246
13.2.2	Espérance d'une somme de variables aléatoires	248
13.2.3	Variables aléatoires indépendantes	249
13.2.4	Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes	250
13.3	Variables aléatoires i.i.d.	252
13.4	Exercices	254
14	Loi binomiale	257
14.1	Schéma de Bernoulli	257
14.1.1	Épreuve et loi de Bernoulli	257
14.1.2	Espérance et variance d'une loi de Bernoulli	258
14.1.3	Schéma de Bernoulli	259
14.2	Loi binomiale	260
14.2.1	Définition et propriété	260
14.2.2	Représentation graphique d'une loi binomiale	261
14.2.3	Espérance et variance d'une loi binomiale	262
14.3	Exercices	264
15	Loi des grands nombres	271
15.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	271
15.1.1	Inégalité de Markov	271
15.1.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	273
15.2	Loi des grands nombres	275
15.2.1	Inégalité de concentration	276
15.2.2	Loi faible des grands nombres	277
15.3	Exercices	278

Correction des applications	283
Correction des exercices	347
A Précis de rédaction	479
A.1 Introduire tout ce dont on parle	480
A.1.1 Introduire une variable	480
A.1.2 Nommer un objet	482
A.2 Les mélanges douteux	483
A.2.1 Concernant les quantificateurs	483
A.2.2 Concernant l'implication et l'équivalence	484
A.3 Annoncer la couleur	487
A.4 Citer une définition ou une propriété	488
A.5 Définir une fonction	488
A.6 Dériver une fonction	490
B Questions exigibles et lettres grecques	493
B.1 Liste des questions de cours exigibles	493
B.2 Table des lettres grecques	495
Remerciements	497