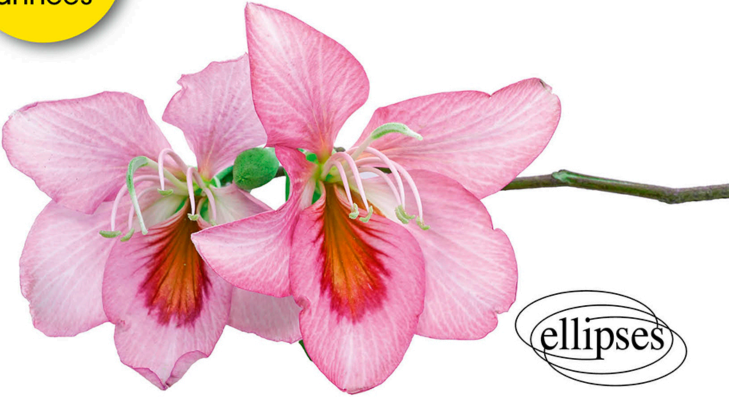
Laurent Maurice

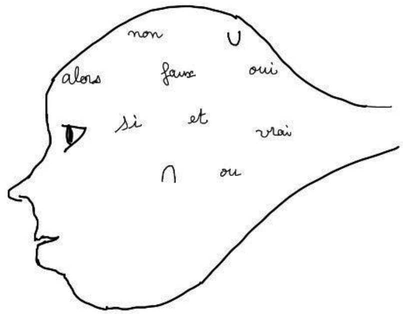
Mathématiques appliquées à l'informatique

BTS SIO
1re et 2e
années



ellipses

CHAPITRE 1 : Logique



A - Calcul propositionnel

Rappel : une proposition est un énoncé qui a un sens et à propos duquel on sait avec certitude s'il est vrai ou faux.

Exemples :

- p : « Je suis plus grand ».

p n'a pas de sens, ce n'est donc pas une proposition.

- q : « La France sera championne du monde de rugby en 2023 et 2027 ».

q a un sens mais on ne sait pas si c'est vrai au faux, ce n'est pas non plus une proposition.

- r : « Une année est faite de 12 mois », s : « 7 + 8 x 2 = 30 ».

r et s ont tous les deux un sens et on peut dire avec certitude que r est vrai et s est faux ; ce sont donc deux propositions.

On dit alors que r a pour valeur de vérité **1** et s aura comme valeur de vérité **0**.

I. Connecteurs logiques et leur table de vérité

Dans ce paragraphe p, q et r désignent des propositions.

1) La négation

La négation d'une proposition p est notée **non(p)**, $\boldsymbol{\overline{p}}$ ou encore ¬ **p**.

Sa valeur de vérité est le contraire de celle de p.

Table de vérité

p	$\neg$p
0	1
1	0

Exemples :

- p est la proposition suivante : « $(-3)^2 = 9$ » sa négation $\neg$p,

est « $(-3)^2 \neq 9$ »

p = 1 donc $\neg$p = 0

- q est la proposition : « $3^2 < 8$ » sa négation $\neg$q est « $3^2 \geq 8$ »

q = 0 donc $\neg$q = 1 en effet « $3^2 \geq 8$ » est vraie.

2) La conjonction « ET »

Elle est notée **p$\wedge$q.**

Sa valeur de vérité est à 1 si, et seulement si, les deux propositions liées sont toutes les deux à 1.

Table de vérité

p	q	p$\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Exemples :

- p : « $(-4)^2 = 16$ » et q : « $-4^2 = 16$ »

Ici p = 1 et q = 0 donc $p \wedge q = 0$

La conjonction est fausse : les propositions ne sont pas toutes les deux vraies.

- r : « 6 x 7 = 42 » et s : « 8 x 7 > 54 »

Ici r = 1 et s = 1 donc $r \wedge s = 1$

Les deux propositions sont vraies en même temps, donc la conjonction est vraie.

3) La disjonction « OU »

Elle est notée **p v q**.

Sa valeur de vérité est à 0 si, et seulement si, les deux propositions liées sont toutes les deux à 0.

Table de vérité

p	q	p v q
0	**0**	**0**
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemples :

- p : « $(-4)^2 = 16$ » et q : « $-4^2 = 16$ »

Ici p = 1 et q = 0 donc p v q $= 1$

La disjonction est vraie car une des propositions (p) est vraie.

- r : « 7 x 7 = 42 » et s : « 8 x 7 < 54 »

Ici r = 0 et s = 0 donc r $\vee$ s $= 0$

Les deux propositions sont fausses en même temps, donc la disjonction est fausse.

Exercice 1 : p et q sont deux propositions.

1) Etablir la table de vérité de $\bar{p} \vee \bar{q}$
2) Etablir la table de vérité de $\bar{p} \wedge \bar{q}$
3) Etablir la table de vérité de $\neg(p \wedge q)$
4) Etablir la table de vérité de $\neg(p \vee q)$
5) En déduire les 2 lois de Morgan.

Exercice 2 : p, q et r sont trois propositions.

1) Etablir la table de vérité de $p \vee (q \wedge r)$
2) Etablir la table de vérité de $p \wedge (q \vee r)$
3) Etablir la table de vérité de $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4) Etablir la table de vérité de $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5) En déduire les deux égalités sur la distributivité de ces connecteurs.

4) L'implication

Elle est notée **p** $\Rightarrow \boldsymbol{q}$.

Sa valeur de vérité est à 0 si, et seulement si, p est vraie et q est fausse.

Table de vérité

p	q	p $\Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	**0**	**0**
1	1	1

Exemples :

- L'implication « 2 < 3 $\Rightarrow$ 2 = 3 » est fausse.

En effet, 2 < 3 est vraie et 2 = 3 est fausse.

- L'implication « 2 < 2 $\Rightarrow$ 2 = 2 » 2 < 2 est fausse et 2 = 2 est vraie.

Donc l'implication est vraie.

Exercice 3 : p et q sont deux propositions.

1) Etablir la table de vérité de $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$
2) Etablir la table de vérité de $\neg q \Rightarrow \neg p$: appelée la contraposée de $p \Rightarrow q$
3) En déduire deux remarques importantes : l'une impliquant le signe $=$ et l'autre le signe $\neq$.
4) Ecrire le théorème de Pythagore, puis sa contraposée.

Exercice 4 : p, q, r sont trois propositions.

1) Etablir la table de vérité de $(q \Rightarrow p) \Rightarrow r$
2) Etablir la table de vérité de $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3) Observer et conclure.

5) L'équivalence

Elle est notée **p** $\Leftrightarrow$ **q**.

Sa valeur de vérité est à 1 si, et seulement si, les deux propositions liées ont les mêmes valeurs de vérité.

Table de vérité

p	q	$P \Leftrightarrow q$
0	**0**	**1**
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Exemples :

- « $2 \times 4 = 8 \Leftrightarrow 8 \times 9 > 54$ » est vraie.

En effet, $2 \times 4 = 8$ est vraie et $8 \times 9 > 54$ aussi.

- « $5 \times 2 = 10 \Leftrightarrow 8 \times 10 < 54$ »

$5 \times 2 = 10$ est vraie et $8 \times 9 < 54$ est fausse donc l'équivalence est fausse.

Exercice 5 : p et q sont deux propositions.

1) Etablir la table de vérité du connecteur nand (non et), noté et défini par :

$$p \,|\, q = \neg(p \wedge q)$$

2) Démontrer que $p \,|\, p \Leftrightarrow \neg\, p$
3) Démontrer que $p \wedge q$ peut s'écrire uniquement avec le connecteur nand.
4) Démontrer que $p \vee q$ peut s'écrire uniquement avec le connecteur nand.

II. Prédicats

Définition mathématique : un prédicat est un énoncé dans lequel on donne un renseignement sur un objet mathématique.

1) Le quantificateur universel : ∀

$\forall x$ se lit « quel que soit x » ou encore « pour toutes valeurs de x ».

Exemple :

$\forall x \in \mathbf{R}$ se lit « pour tout réel x ».

Exemples de prédicat avec leur valeur de vérité :

- $\forall x \in \mathbf{R}\ , x^2 \geq 0$, déterminer sa valeur de vérité.

Quel que soit un réel x, son carré est positif ou nul. C'est toujours vrai.

- ∀ élève du Lycée La Chataigneraie appelé e, e ∈ $BTS\ SIO$.

Des élèves du lycée la Chataigneraie ne sont pas en BTS SIO. Le prédicat est donc faux.

2) Le quantificateur existentiel : ∃

$\exists\ x$ se lit « il existe **au moins** un x».

Exemple de prédicat :

$\exists\ x \in \mathbf{R}\ , x^2 \leq 0$: il existe au moins un réel x dont le carré est positif ou nul, $0^2 = 0$ donc le prédicat est vrai.

Exercice 6 :

Traduire en écriture symbolique les prédicats suivants et donner leur valeur de vérité.

1) Tout nombre réel peut s'écrire sous la forme d'une fraction.
2) Il existe un nombre réel qui n'a pas de partie décimale finie.
3) Toute somme de deux entiers naturels est positive ou nulle.
4) Il existe deux entiers relatifs dont la somme est égale à leur quotient.

3) Négations des quantificateurs

A retenir : soit E un ensemble et p une proposition.

- $\neg\big(\forall x \in E\ , p(x)\big) = \ \exists x \in E, \neg p(x)$

(La négation de ∀ est ∃)

- $\neg\big(\exists x \in E\ , p(x)\big) = \ \forall x \in E, \neg p(x)$

(La négation de ∃ est ∀)

Exemple :

La négation de l'exemple précédent $\exists\ x \in \mathbf{R}\ , x^2 \leq 0$ est $\forall x \in \mathbf{R}\ , x^2 > 0$. Comme $0^2 = 0$, sa valeur de vérité est fausse.

Exercice 7 :

Déterminer la négation des prédicats de l'**exercice 6** en écriture symbolique et en français, puis donner leur valeur de vérité.

B - Langage ensembliste

I. Ensembles : appartenance et inclusion

1) Définition

Un ensemble est défini par ses éléments.

Exemple :

- L'ensemble E est défini par E = {6,10,11,22,41}

Ensembles à connaitre :

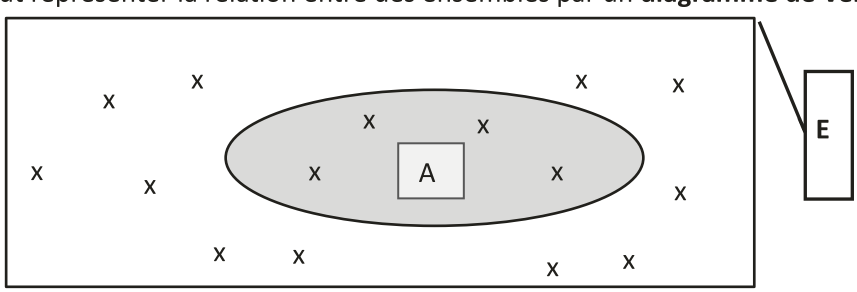
- ∅ ou { } est l'ensemble vide.
- $\mathbf{R}$ est l'ensemble des réels ; $\mathbf{R}^*$ = $\mathbf{R}\backslash$ {0} : l'ensemble des réels, privé de zéro.
- $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : {0 ;1 ;2 ;3 ;4 …}
- **Z** est l'ensemble des entiers relatifs : {… ; -2 ; -1 ; 0 1 ; 1 ;2 …}

2) Appartenance (∈) et inclusion (⊂)

On dit qu'un élément appartient à un ensemble (5 ∈ $\mathbf{N}$) et qu'un ensemble est inclus dans un autre ensemble.

(E ⊂ $\mathbf{N}$ ou encore $\mathbf{N}$ ⊂ $\mathbf{Z}$).

On peut représenter la relation entre des ensembles par un **diagramme de Venn** :



L'inclusion peut se traduire par ces différents prédicats :

- Si $x \in E$, alors $x \in A$

- (A ⊂ E) $\Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in E)$, cas particulier A ⊂ A.

On dit que A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

3) Déterminer toutes les parties d'un ensemble

Soit E = {a, b, c, d}, on note $\mathcal{P}$ (E) l'ensemble des parties de E.

$\mathcal{P}$ (E) =
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, E\}$

On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E, ici noté Card E = 4.

Propriété :

Card $\mathcal{P}$ (E)= $2^{Card\ E}$

Ici, on a Card $\mathcal{P}$ (E) = $2^4 = 16$

4) Egalité entre deux ensembles

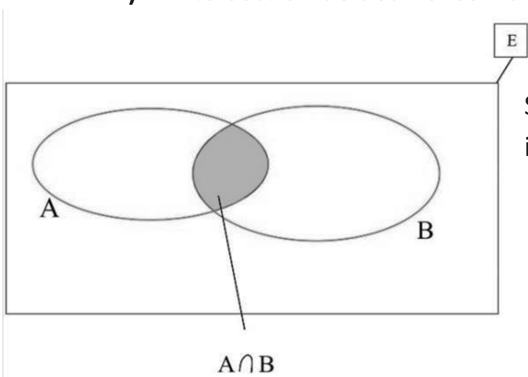
Soient A et B deux ensembles.

(A = B) $\Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\Leftrightarrow$ (A ⊂ B) ∧ (B ⊂ A)

II. Parties d'ensemble : opérations sur les ensembles

1) L'intersection de deux ensembles, noté : ∩



Soient A et B deux ensembles inclus dans l'ensemble E.

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in E, (x \in A) \wedge (x \in B))$$