

MICROÉCONOMIE

Exercices corrigés et commentés



Compléments en ligne

L3 & Master



Franck Bien, Thomas Lanzi



Droite budgétaire et temps

Les énoncés

Exercice 1 – Actualisation avec 3 dates

Il existe un unique bien non durable disponible aux trois dates de l'économie : $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$, qui est pris comme numéraire. Il existe un marché des fonds prêtables sur lequel l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt $r_1 = 10\%$ et placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt $r_2 = 20\%$. Aux dates $t = 1$ et $t = 2$ il récupère son épargne ainsi que le gain de son placement financier. L'agent dispose de revenus qui s'élèvent aux trois dates d'économie respectivement à $R_0 = 100$, $R_1 = 220$ et $R_2 = 132$. Ces derniers financent la consommation aux trois dates de l'économie et sont notées respectivement c_0 , c_1 et c_2 .

Définir et calculer la droite budgétaire consolidée.

Exercice 2 – Titres financiers élémentaires

Il existe un unique bien non durable disponible aux trois dates de l'économie : $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$, qui est pris comme numéraire. Il existe un marché des titres financiers sur lequel l'agent peut acheter ou vendre deux titres financiers élémentaires, noté 1 et 2, à la date $t = 0$, respectivement aux prix $\beta_1 = 0,8$ et $\beta_2 = 0,75$. Aux dates $t = 1$ et $t = 2$, ces titres procurent uniquement un revenu unitaire à leur date d'échéance. Les quantités de titres achetés ou vendus en $t = 0$ et $t = 1$ sont notés respectivement x_1 et x_2 . L'agent dispose de revenus qui s'élèvent aux trois dates d'économie respectivement à $R_0 = 200$, $R_1 = 400$ et $R_2 = 100$. Ces derniers financent la consommation aux trois dates de l'économie et sont notées respectivement c_0 , c_1 et c_2 .

Définir et calculer la droite budgétaire intertemporelle.

Exercice 3 – Taux d'intérêt longs

Une économie comprend 4 dates, notées $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ et les marchés financiers sont complets et parfaits. Sur ce marché des fonds prêtables, l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt nominal court $r_1 = 10\%$, placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_2 = 5\%$ et placer ou emprunter un montant S_2 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_3 = 25\%$.

l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt nominal court $r_1 = 10\%$, placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_2 = 5\%$ et placer ou emprunter un montant S_2 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_3 = 25\%$.

Un agent possède des dotations initiales notées w_t et ses consommations temporelles sont notées c_t . Le profil des dotations initiales de l'agent est $w = (100, 200, 300, 400)$.

Il existe un bien unique daté qui est pris comme numéraire.

- 1) Écrire les droites budgétaires temporelles.
- 2) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les taux d'intérêt nominaux courts.
- 3) Calculer les taux d'intérêt longs.
- 4) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les taux d'intérêt nominaux longs.
- 5) Commenter.

Exercice 4 – Zéro-coupons

Une économie comprend 4 dates, notées $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ et les marchés financiers sont complets et parfaits. Sur ce marché des fonds prêtables, l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt nominal court $r_1 = 25\%$, placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_2 = 5\%$ et placer ou emprunter un montant S_2 , à la date $t = 2$, au taux d'intérêt nominal court $r_3 = 10\%$.

Un agent possède des dotations initiales notées w_t et ses consommations temporelles sont notées c_t . Le profil des dotations initiales de l'agent est $w = (300, 100, 400, 200)$.

Il existe un bien unique daté qui est pris comme numéraire.

- 1) Écrire les droites budgétaires temporelles.
- 2) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les taux d'intérêt nominaux courts.
- 3) Il existe également un système complet de zéro-coupons. Calculer les prix de ces actifs élémentaires.
- 4) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les prix des zéro-coupons.
- 5) Commenter.

Exercice 5 – Actions

Une économie comprend 4 dates, notées $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ et les marchés financiers sont complets et parfaits. Sur ce marché des fonds prêtables, l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt nominal court $r_1 = 5\%$, placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_2 = 10\%$ et placer ou emprunter un montant S_2 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_3 = 20\%$.

Un agent possède des dotations initiales notées w_t et ses consommations temporelles sont notées c_t . Le profil des dotations initiales de l'agent est $w = (100, 200, 400, 100)$.

Il existe un bien unique daté qui est pris comme numéraire.

- 1) Écrire les droites budgétaires temporelles.
- 2) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les taux d'intérêt nominaux courts.

Il existe un système de marchés d'actions échangeables à toute date sauf celle d'échéance. Une action acquise à la date t au prix q_t procure un versement de dividendes d_{t+1} à la date $t + 1$ et peut être revendue à cette même date au prix q_{t+1} . A la date terminale T de l'économie, une action ne peut pas être revendue car sa valeur est nulle ($q_T = 0$). Une action, notée A , procure le flux de dividendes futurs suivants : $d^A = (10, 20, 10)$. La quantité d'action A achetée à la date t est notée x_t .

- 3) Calculer le prix de l'action à chaque date.
- 4) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les données financières de l'action.
- 5) Commenter.

Exercice 6 – Obligations

Une économie comprend 4 dates, notées $t = 0, t = 1, t = 2$ et $t = 3$ et les marchés financiers sont complets et parfaits. Sur ce marché des fonds prêtables, l'agent peut placer ou emprunter un montant S_0 , à la date $t = 0$, au taux d'intérêt nominal court $r_1 = 5\%$, placer ou emprunter un montant S_1 , à la date $t = 1$, au taux d'intérêt nominal court $r_2 = 10\%$ et placer ou emprunter un montant S_2 , à la date $t = 2$, au taux d'intérêt nominal court $r_3 = 25\%$.

Un agent possède des dotations initiales notées w_t et ses consommations temporelles sont notées c_t . Le profil des dotations initiales de l'agent est $w = (200, 300, 400, 100)$.

Il existe un bien unique daté qui est pris comme numéraire.

- 1) Écrire les droites budgétaires temporelles.
- 2) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les taux d'intérêt nominaux courts.
- 3) Il existe également un système complet d'obligations dont les taux sont notés \mathcal{R}_t . Calculer les valeurs de \mathcal{R}_t .
- 4) Caractériser la droite budgétaire intertemporelle en actualisant avec les valeurs des coupons constants.
- 5) Commenter.

Exercice 7 – Contrats de futures

Il existe un unique bien non durable disponible aux quatre dates de l'économie : $t = 0, t = 1, t = 2$ et $t = 3$, qui est pris comme numéraire.

L'économie possède un système de marchés de contrats de futures pour réallouer les ressources. Un contrat de futures stipule la quantité de biens livrés aux dates $t \geq 1$ et dont le prix déterminé à la date $t = 0$ est payé à la date d'échéance T avec $1 \leq T \leq 3$.

Les deux contrats de futures A et B d'échéance différente délivrent respectivement les dividendes futurs suivants : $d^A = (6,2)$ et $d^B = (2,0,4)$. La demande du contrat de futures j avec $j \in \{A, B\}$ à la date $t = 0$ par un agent est notée y_j et les prix des contrats de futures A et B payés à échéance sont notés respectivement q_2^A et q_3^B et s'établissent à : $q_2^A = 8$ et $q_3^B = 8$.

Un agent possède des dotations initiales à chaque date et sont notées w_t et ses consommations temporelles sont notées c_t . Le profil des dotations initiales de l'agent est $w = (10, 20, 50, 40)$.

- 1) Définir et calculer les droites budgétaires temporelles contingentes de l'agent ainsi que sa droite budgétaire consolidée.
- 2) Commenter.

Les corrigés

Corrigé exercice 1 – Actualisation avec 3 dates

À chaque date, la droite budgétaire temporelle énonce que la somme des revenus est égale à la somme des dépenses.

En $t = 0$, nous avons :

$$R_0 = c_0 + S_0$$

Soit,

$$100 = c_0 + S_0 \quad (1)$$

En $t = 1$, nous obtenons :

$$R_1 + (1 + r_1)S_0 = c_1 + S_1$$

Soit,

$$220 + 1,1S_0 = c_1 + S_1 \quad (2)$$

En $t = 2$, nous obtenons :

$$R_2 + (1 + r_2)S_1 = c_2$$

Soit,

$$132 + 1,2S_1 = c_2 \quad (3)$$

Les équations (1) et (3) permettent de définir les expressions de l'épargne à chaque date :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = 100 - c_0 \quad (4) \\ S_1 = \frac{c_2 - 132}{1,2} \quad (5) \end{array} \right.$$

En reportant les expressions (4) et (5) dans l'équation (2), nous obtenons :

$$220 + 1,1(100 - c_0) = c_1 + \left(\frac{c_2 - 132}{1,2} \right) \quad (6)$$

L'équation (6) est exprimée en valeur monétaire de date $t = 1$. Pour obtenir une expression actualisée en $t = 0$, nous multiplions chaque terme par $\frac{1}{(1+r_1)}$, soit avec les données de l'énoncé $\frac{1}{1,1}$ (ce qui est équivalent à diviser tous les termes par 1,1).

L'équation (6) se réécrit :

$$c_0 + \frac{c_1}{1,1} + \frac{c_2}{1,1 \times 1,2} = 100 + \frac{220}{1,1} + \frac{132}{1,1 \times 1,2}$$

Soit,

$$c_0 + 0,91c_1 + 0,76c_2 \cong 400$$

La droite budgétaire intertemporelle énonce que la somme des dépenses de consommation actualisées est égale à la somme des revenus actualisés.

COMMENTAIRES

- *Un bien daté t est disponible et consommable uniquement à la date t .*
- *La droite budgétaire intertemporelle est également nommée droite budgétaire actualisée ou droite budgétaire consolidée.*
- *Il ne faut pas confondre la contrainte budgétaire avec la droite de budget car la droite budgétaire appartient à l'ensemble budgétaire dont elle est le bord supérieur. Elle correspond à la contrainte budgétaire saturée : le signe d'inégalité est remplacé par le signe d'égalité.*
- *L'écriture de la droite budgétaire actualisée permet de caractériser la richesse totale actualisée de l'individu.*
- *Avec trois dates, il convient de définir deux montants d'épargne. En généralisant, avec n dates, il convient de définir $(n - 1)$ montants d'épargne.*
- *Les taux d'intérêt sont datés par rapport aux dates de paiement des intérêts.*
- *Le système de marché de fonds prêtables ou intermédiés courts est complet car il permet de redistribuer entre deux dates successives et parfait car il autorise les opérations financières de tout montant.*
- *Les valeurs des taux d'intérêt courts r_t sont strictement supérieures à -1 pour que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage soit vérifiée. D'une part, si $1 + r_t < 0$, l'individu recevrait 1 euro en $t = 0$ et rembourserait un montant négatif de $1 + r_t$ euro (recevrait donc) à la date d'échéance t . L'adage « à tous les coups, on gagne » serait respecté. D'autre part, si $1 + r_t = 0$, l'individu recevrait 1 euro en $t = 0$ et rembourserait un montant nul de $1 + r_t$ euro à la date d'échéance t . L'adage réécrit « à tous les coups, on ne perd rien » serait respecté.*
- *Si le système de marchés de fonds prêtables est complet et parfait, alors toutes les valeurs des taux d'intérêt courts sont uniques et vérifient pour tout t :*

$$1 + r_t > 0 \Leftrightarrow r_t > -1$$

COMMENTAIRES ÉCONOMIQUES (I)

- *Si le bien non durable daté est pris comme numéraire alors $p_1 = p_2 = 1$.*
- *Si l'inflation est nulle ($p_1 = p_2$) alors le taux d'intérêt réel est égal au taux d'intérêt nominal ($i = r$).*

- Dans le cadre intertemporel, la non-durabilité d'un bien équivaut à considérer deux biens différents. Même si la description physique du bien est la même, les dates de mise à disposition les différencient.
- La notion de droite budgétaire consolidée est équivalente à celle de la droite budgétaire actualisée et à celle de la droite budgétaire intertemporelle.
- La méthode d'actualisation indexée sur la valeur des taux d'intérêt (représentant le coût d'opportunité du capital) est un des résultats fondamentaux de la théorie des taux d'intérêt de Fisher (1930).
- Le procédé d'actualisation pour déterminer la valeur boursière d'une entreprise a été énoncé la première fois par Williams (1938) : la valeur présente d'une entreprise est égale aux dividendes futurs actualisés versés aux actionnaires.
- Il existe une analogie entre un cadre avec deux biens de consommation et un cadre avec un bien daté et deux dates lorsque le bien est pris comme numéraire. Dans le premier cas, la droite de budget s'énonce :

$$c_1 + c_2 = R$$

Dans le second cadre, la droite budgétaire consolidée s'écrit :

$$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = R_1 + \frac{R_2}{1+r}$$

En posant $p = \frac{1}{1+r}$ et $R' = R_1 + \frac{R_2}{1+r}$, elle se réécrit :

$$c_1 + pc_2 = R'$$

COMMENTAIRES ECONOMIQUES (II)

- La droite budgétaire actualisée avec des taux nominaux courts s'écrit :

$$c_0 + \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{\prod_{\delta=1}^t (1+r_\delta)} = w_0 + \sum_{t=1}^T \frac{w_t}{\prod_{\delta=1}^t (1+r_\delta)}$$

- Pour rappel, les prix actualisés en $t = 0$ et de date $t > 0$, notés p_t^{act} , s'énoncent lorsque le bien est pris comme numéraire :

$$p_t^{act} = \frac{1}{\prod_{\delta=1}^t (1+r_\delta)}$$

Corrigé exercice 2 – Titres financiers élémentaires

À chaque date, la droite budgétaire temporelle énonce que la somme des revenus est égale à la somme des dépenses.

En $t = 0$, nous avons :

$$R_0 = c_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

Soit,

$$200 = c_0 + 0,8x_1 + 0,75x_2 \quad (1)$$

En $t = 1$, nous obtenons :

$$R_1 + x_1 = c_1$$

Soit,

$$400 + x_1 = c_1 \quad (2)$$

En $t = 2$, nous obtenons :

$$R_2 + x_2 = c_2$$

Soit,

$$100 + x_2 = c_2 \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) permettent de définir les stratégies financières à chaque date :

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - 400 & (4) \\ x_2 = c_2 - 100 & (5) \end{cases}$$

En reportant les expressions (4) et (5) dans l'équation (1), nous obtenons :

$$200 = c_0 + 0,8(c_1 - 400) + 0,75(c_2 - 100) \quad (6)$$

L'équation (6) se réécrit :

$$c_0 + 0,8 \times c_1 + 0,75 \times c_2 = 200 + 0,8 \times 400 + 0,75 \times 100$$

Soit,

$$c_0 + 0,8c_1 + 0,75c_2 = 595$$

La droite de budget intertemporelle énonce que la somme des dépenses de consommation actualisées est égale à la somme des revenus actualisés.

COMMENTAIRES

- Ces titres financiers élémentaires sont des obligations particulières puisqu'ils délivrent 1 euro uniquement à la date d'échéance (maturité).
- Le taux d'intérêt est un taux d'actualisation tandis que le prix de cet actif élémentaire est un facteur d'actualisation.
- L'individu acquiert x_t titres au prix unitaire β_t à la date $t = 0$, pour recevoir, à la date d'échéance t , x_t euros.
- Ce système de marchés financiers est complet car il permet de redistribuer, entre la date initiale $t = 0$ et toutes les dates futures, et parfait car il autorise les opérations financières de tout montant.
- Les prix β_t sont strictement supérieurs à 0 pour que l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage soit vérifiée. D'une part, si $\beta_t < 0$, l'individu serait payé en $t = 0$ pour recevoir 1 euro à la date d'échéance t . L'adage « à tous les coups, on gagne » serait respecté. D'autre part, si $\beta_t = 0$, l'individu ne débourserait rien en $t = 0$ pour recevoir 1 euro à la date $t = 1$. L'adage réécrit « à tous les coups, on ne perd rien » serait respecté.
- Si le système de marchés de titres élémentaires est complet et parfait, alors toutes les valeurs des prix sont uniques et vérifient pour tout t :
$$\beta_t > 0$$

Corrigé exercice 3 – Taux d'intérêt longs

Question 1

À chaque date, la droite budgétaire temporelle énonce que la somme des revenus est égale à la somme des dépenses.