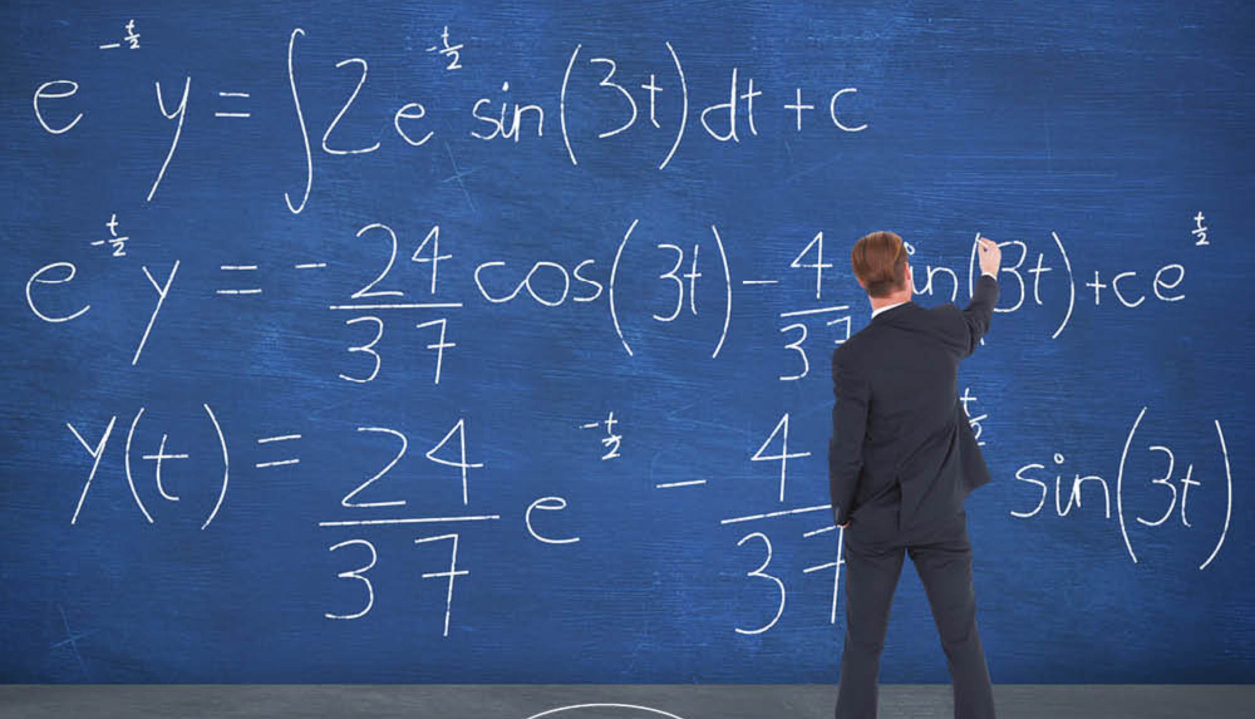
1re / Tle

Des maths au Grand Oral



Yves Coudert
Guillaume Ferré

ellipses

Chapitre 1
Second degré

Problème 1.1 ★★

En quoi le nombre d'or est-il un joyau des mathématiques ?

[**Spécialités :** Mathématiques, NSI]

Soit a et b des nombres réels positifs non nuls. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = a$ et de largeur $AD = b \leq a$ vérifiant la propriété :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

On dit que le rectangle $ABCD$ est un **rectangle d'or**.
On considère le point E du segment $[DC]$ tel que $DE = b$ et le point F tel que $AFED$ soit un carré de côté b. On a alors $EC = FB = a - b$.

1. Montrer que φ est une solution positive de l'équation suivante :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Résoudre cette équation du second degré et en déduire la valeur exacte de φ appelé **nombre d'or**.

2. Montrer les résultats suivants :

- $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$;
- $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$;
- Pour tout entier naturel n, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

3. Montrer que $FBCE$ est un rectangle d'or à l'aide de la question précédente.

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n} \end{cases}.$$

On admet que ces suites sont bien définies et convergent vers des limites strictement positives.
Déterminer les valeurs exactes de ces limites.

5. a. On définit la suite (F_n) de manière explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$F_n = \varphi^n.$$

À l'aide de la question **3**, exprimer F_{n+2} en fonction de F_{n+1} et F_n.
Préciser ensuite les conditions initiales.
On obtient ainsi une définition par récurrence de la suite (F_n) qui caractérise **les suites de Fibonacci**.

b. Proposer une fonction écrite en langage Python utilisant un paramètre n et utilisant la relation obtenue en **5. a.** pour déterminer la valeur de F_n.

Correction

1. On sait que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} > 0$ donc, en multipliant l'équation par $\frac{a}{b}$, on obtient

$$\frac{a+b}{a} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Ainsi, $\varphi + 1 = \varphi^2$ et donc $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Par conséquent, $\varphi = \frac{a}{b}$ est bien une solution positive de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$.

2. L'équation est du type $a'x^2 + b'x + c' = 0$ avec $a' = 1$ et $b' = c' = -1$.
Le discriminant est $\Delta = b'^2 - 4a'c' = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

En effet, $5 > 1$ et, puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc $\sqrt{5} > \sqrt{1}$ c'est-à-dire $1 - \sqrt{5} < 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Comme φ est une solution positive de l'équation, on en déduit que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans un premier temps, on peut écrire $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi + 1 = \varphi^2$ (*).

- D'une part, en divisant par $\varphi > 0$ dans (*), on obtient $\frac{\varphi}{\varphi} + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi}$.

Nous avons alors l'égalité (1) : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

En poursuivant le même raisonnement, on obtient :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}.$$

- D'autre part, en prenant la racine carrée dans (*), on a :

$$\sqrt{1+\varphi} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi.$$

Nous avons donc l'égalité (2) : $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$.
En poursuivant le même raisonnement, on obtient :

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}$$

- Nous démontrons le dernier point par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

Initialisation : $\varphi^2 = \varphi + 1 = \varphi^1 + \varphi^0$ donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier naturel n donné.

On a donc $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ et, en multipliant par φ :

$$\varphi \times \varphi^{n+2} = \varphi \times \varphi^{n+1} + \varphi \times \varphi^n \Leftrightarrow \varphi^{n+1+2} = \varphi^{n+1+1} + \varphi^{n+1}.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après l'axiome de récurrence l'égalité $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. En notant $a' = b$ et $b' = a - b$, on a :

$$\frac{a'+b'}{a'} = \frac{a}{b} = \varphi \quad \text{et} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{b}{a-b} = \frac{b}{b\left(\frac{a}{b} - 1\right)} = \frac{1}{\varphi - 1}.$$

Or, nous avons montré que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ c'est-à-dire $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.
Ceci nous donne :

$$\frac{a'}{b'} = \varphi = \frac{a'+b'}{a'}.$$

Le rectangle *FBCE* est donc bien un rectangle d'or.

4. Nous allons utiliser la même méthode pour traiter les deux limites.
Supposons que la suite (u_n) converge vers la limite $L > 0$.

Nous utilisons la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

- La fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$.

- Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(L) = 1 + \dfrac{1}{L}$ et nous obtenons l'égalité

$$L = 1 + \frac{1}{L}.$$

On en déduit que la limite L vérifie l'égalité $L^2 = 1 + L$.
En d'autres termes, L est une solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On en conclut que $L = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Supposons à présent que la suite (v_n) converge vers la limite $L' > 0$.

Nous utilisons la relation de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.

- La fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car dérivable sur cet ensemble comme composée de fonctions dérivables donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = g(L')$.
- Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = g(L') = \sqrt{1+L'}$ et nous obtenons l'égalité

$$L' = \sqrt{1+L'}.$$

On en déduit que la limite L' vérifie l'égalité $L'^2 = 1 + L'$.
En d'autres termes, L' est une solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On en conclut que $L' = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. a. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ c'est-à-dire $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Les conditions initiales sont $F_0 = \varphi^0 = 1$ et $F_1 = \varphi^1 = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : Habituellement, lorsque l'on parle de la suite de Fibonacci (F'_n), on considère les conditions initiales $F'_0 = 0$ et $F'_1 = 1$.

b.

```
from math import sqrt

def fibo(n):
    a=1
    b=(1+sqrt(5))/2
    if n==0:
        return a
    elif n==1 :
        return b
    else :
        for i in range(1,n):
            a,b=b,a+b
        return b
```

Bien entendu, on peut utiliser la fonction puissance de Python pour faire un calcul direct :

```
def fibobis(n):
    b=(1+sqrt(5))/2
    return b**n
```

Pour approfondir

Mickaël Launay, « Le nombre d'or – Micmaths »,
youtube.com (26 juin 2014).

Yvan Monka, « Le nombre d'or »,
maths-et-tiques.fr (2004).

Thérèse Eveilleau, « Le nombre d'or »,
therese.eveilleau.pageperso-orange.fr (2013).

Problème 1.2 ★

Peut-on modéliser la trajectoire d'une balle de tennis ?

[**Spécialités :** Mathématiques, Physique-Chimie]

On souhaite déterminer l'expression de la fonction f associée à la modélisation de la trajectoire d'une balle de tennis. On dispose des informations suivantes :

- Un premier joueur a tapé dans la balle à 10 m du filet, la balle était alors à 1 m du sol ;
- La balle s'est élevée à 2,50 m ;
- La balle est renvoyée par l'autre joueur à 4 m (de l'autre côté du filet) et à 1 m du sol également (la balle n'a pas rebondi au sol).

1. Déterminer la fonction f, fonction polynôme du second degré, donnant l'altitude de la balle en fonction de sa distance x par rapport au premier joueur.

2. Sachant que le filet mesure 1,07 m, à quelle hauteur la balle est-elle passée au-dessus du filet ? On arrondira le résultat au centième près.

Correction

1. On suppose que la fonction f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels tels que $a \neq 0$. Cette fonction donne la position en hauteur de la balle en fonction de sa distance du premier joueur.
D'après l'énoncé, la balle était à 1 m du sol lorsque le premier joueur a tapé celle-ci, c'est-à-dire $f(0) = c = 1$.
Le deuxième joueur est à une distance de $10 + 4 = 14$ m lorsqu'il a frappé à son tour et la balle était à une hauteur de 1 m.
Nous avons donc :

$$f(14) = a \times 14^2 + b \times 14 + c = 1 \Leftrightarrow 196a + 14b + 1 = 1.$$

Par conséquent, $b = -14a$.
Par ailleurs, on sait que l'extremum de la fonction est atteint en $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ soit :

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2,5 \Leftrightarrow a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 2,5.$$

Par conséquent, $\dfrac{ab^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{2a} + 1 = 2,5.$

On en déduit que $-\dfrac{ab^2}{4a^2} = 1{,}5 \Leftrightarrow b^2 = -6a \Leftrightarrow (-14a)^2 = -6a$.

Ainsi, d'une part, $a = -\dfrac{6}{196} = -\dfrac{3}{98}$ et, d'autre part,

$$b = -14a \Leftrightarrow b = -14\left(-\frac{3}{98}\right) = \frac{3}{7}.$$

Il vient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'expression demandée :

$$f(x) = -\frac{3}{98}x^2 + \frac{3}{7}x + 1.$$

2. Le filet étant situé à 10 m du premier joueur, la hauteur de la balle est donc donnée par :

$$f(10) = -\frac{3}{98} \times 10^2 + \frac{3}{7} \times 10 + 1 = \frac{109}{49} \approx 2{,}22 \text{ m}.$$

La balle passe à environ $2{,}22 - 1{,}07 = 1{,}15$ m du filet.

Pour approfondir

Labolycée, « Sujet Novembre 2009 :
Exercice II – Un service au tennis »,
Labolycee.org (2009)

S. Jequier, B. Dauphole, « A Roland Garros »,
ressources.unisciel.fr (2016).

Problème 1.3 ★★

Comment déterminer le point de croisement de deux véhicules ayant des mouvements rectilignes uniformément variés ?

[**Spécialités :** Mathématiques, Physique-Chimie]

Deux véhicules V_1 et V_2 sont à l'arrêt sur la même route à une distance d'un kilomètre l'un de l'autre. Ils démarrent en même temps l'un en direction de l'autre et on suppose qu'ils suivent des mouvements rectilignes uniformément variés.
On assimile la route à une droite dont l'origine est celle du véhicule V_1 à l'arrêt.
On désigne respectivement par x_1 et x_2 les positions des véhicules V_1 et V_2.
Enfin, l'accélération du véhicule V_1 est $a_1 = 2{,}9\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et l'accélération du véhicule V_2 est $a_2 = 3{,}2\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

1. Déterminer les équations donnant les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ exprimées en mètre en fonction du temps exprimé en seconde.

2. Déterminer t_0 le temps puis la position $x_1(t_0)$ du croisement des deux véhicules. On arrondira les résultats au dixième près.

3. Dans cette question, on suppose que $a_2 = ka_1 = 2{,}9k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de k pour que la position du croisement des deux véhicules vérifie $x_1(t_0) = 250$ m.

Correction

1. Le mouvement des véhicules est rectiligne uniformément varié donc la vitesse $v_1(t)$ s'obtient par intégration de l'équation différentielle

$$a_1 = v_1'(t).$$

Le véhicule étant à l'arrêt initialement, $v_1(0) = 0$ donc

$$v_1(t) = a_1 t = 2{,}9t.$$

$x_1(t)$ s'obtient ensuite par intégration de l'équation différentielle

$$v_1(t) = x_1'(t) = 2{,}9t.$$

Initialement, $x_1(0) = 0$ donc

$$x_1(t) = \frac{2{,}9}{2}t^2.$$

On procède ensuite de la même façon pour obtenir $x_2(t)$:
Le mouvement des véhicules est rectiligne uniformément varié donc la vitesse $v_2(t)$ s'obtient par intégration de l'équation différentielle

$$a_2 = v_2'(t).$$