

TOUT-EN-UN

TREMPLIN MATHS

en **PCSI-MPSI**

- ✓ Introduction au programme
- ✓ Méthodologie
- ✓ Entraînement progressif



Dr Jean Perisson

Table des matières

Chapitre 1 **Avant-propos** **7**

1.1	Objectifs de cet ouvrage	7
1.1.1	Le constat	7
1.1.2	Ce que ce livre peut pour vous :	8
1.1.3	Ce que ce livre ne vous apportera pas.....	8
1.2	Organisation	9
1.2.1	Partie 1	9
1.2.2	Parties 2 et 3	9
1.2.3	Comment travailler ce cours	9

Chapitre 2 **Éléments de logique et de méthodologie** **11**

2.1	La rédaction	11
2.1.1	Les bases.....	11
2.1.2	Structure de la rédaction de chaque question	12
2.1.3	Les erreurs à éviter.....	12
2.2	Éléments de logique	14
2.2.1	Propositions	14
2.2.2	Connecteurs logiques.....	15
2.2.3	Quantificateurs	16
2.2.4	Négations.....	16
2.3	Ensembles	17
2.3.1	Définition	17
2.3.2	Ensemble vide	17
2.3.3	Sous-ensemble.....	17
2.3.4	Réunion.....	18
2.3.5	Intersection	18
2.3.6	Complémentaire.....	18
2.3.7	Propriétés	18
2.3.8	Produit cartésien.....	19

2.4	Alors, ces démonstrations !	19
2.4.1	Le désarroi de l'étudiant	19
2.4.2	Les grandes méthodes	19
2.4.3	Choisir la bonne méthode	23
2.4.4	Partir de la conclusion (le plus souvent)	24
2.5	Exercices corrigés	30

Chapitre 3 **Ensembles de nombres** **33**

3.1	Ensembles de nombres	33
3.1.1	Ensemble \mathbb{N} des entiers naturels	33
3.1.2	Ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs	36
3.1.3	Ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux	36
3.1.4	Ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels	37
3.1.5	Ensemble \mathbb{R} des nombres réels	37
3.1.6	Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes	40
3.1.7	Bilan de ces "constructions"	40
3.2	Exercices corrigés	42

Chapitre 4 **Algèbre et Analyse** **47**

4.1	Considérations générales	47
4.1.1	Algèbre	47
4.1.2	Analyse	47
4.2	Relations binaires	48
4.2.1	Définition	48
4.2.2	Propriétés	49
4.2.3	Relation d'équivalence	49
4.2.4	Relation d'ordre	50
4.3	Applications	58
4.3.1	Fonction et application	58
4.3.2	Image directe d'une partie A de E	58
4.3.3	Image réciproque d'une partie B de F	58
4.3.4	Suites	59
4.3.5	Restriction d'une application	59
4.3.6	Opérations sur les applications	59
4.3.7	Injection-Surjection-Bijection	60
4.4	Exercices corrigés	64

Chapitre 5 Suites réelles 77

5.1	Définition.....	77
5.1.1	Notations et terminologie.....	77
5.1.2	Exemples.....	78
5.2	Étude d'une suite.....	78
5.3	Majoration-Minoration.....	79
5.3.1	Définitions.....	79
5.3.2	Théorème.....	80
5.4	Monotonie.....	81
5.5	Limites.....	81
5.5.1	Définitions.....	82
5.5.2	Définitions.....	83
5.5.3	Unicité de la limite.....	83
5.5.4	Quelques résultats basiques.....	84
5.5.5	Suites bornées et suites convergentes.....	90
5.5.6	Opérations sur les limites.....	92
5.5.7	Théorème des gendarmes.....	95
5.5.8	Théorème.....	97
5.5.9	Suites adjacentes (très important).....	98
5.5.10	Théorème de Bolzano-Weierstrass.....	99
5.5.11	Suites récurrentes.....	101
5.5.12	Théorème du point fixe de Picard.....	105
5.6	Exercices corrigés.....	107

Chapitre 6 Fonctions à variables réelles 127

6.1	Ensemble de définition.....	127
6.2	Limites.....	128
6.2.1	Topologie de \mathbb{R}	128
6.2.2	Limite en un point.....	129
6.2.3	Limite à droite.....	131
6.2.4	Limite à gauche.....	131
6.2.5	Théorème.....	132
6.2.6	Théorème des gendarmes.....	136
6.2.7	Formes indéterminées $0/0$	142
6.3	Continuité.....	146
6.3.1	Définition.....	146
6.3.2	Globalisation.....	147

6.3.3	Continuité sur un intervalle	147
6.3.4	Remarques importantes.....	147
6.3.5	Définition	149
6.3.6	Composition de deux fonctions continues.....	149
6.3.7	Suites et continuité.....	150
6.3.8	Théorème I des valeurs intermédiaires.....	152
6.3.9	Théorème II	152
6.3.10	Continuité uniforme	152
6.3.11	Continuité simple et continuité uniforme sur un intervalle I.....	153
6.3.12	Théorème.....	153
6.3.13	Théorème de Heine	154
6.3.14	Fonction k-Lipschitzienne	154
6.3.15	Proposition	155
6.4	Exercices corrigés	155
6.5	Dérivabilité	160
6.5.1	Définition	160
6.5.2	Proposition	160
6.5.3	Monotonie et dérivée	162
6.5.4	Théorème de Rolle.....	162
6.5.5	Théorème des accroissements finis.....	163
6.5.6	Corollaire.....	163
6.6	Fonctions réciproques.....	163
6.6.1	Continuité monotone.....	164
6.6.2	Dérivée de la fonction réciproque	166
6.6.3	1- Fonction exponentielle	167
6.6.4	2- Fonction arcsin.....	168
6.6.5	3- Fonction arccos.....	169
6.6.6	4- Fonction arctan.....	170
6.7	Exercices corrigés	172