Patrice Struillou

Licence
Master

Équations fonctionnelles

Cours et exercices corrigés

Équations différentielles, équations intégrales et équations aux dérivées partielles

ellipses

Chapitre 1

Équations différentielles, problèmes de Cauchy

Une équation différentielle est une relation entre une fonction X d'une seule variable (pour nous, la variable sera réelle) et sa dérivée X', ou entre X et plusieurs de ses dérivées successives. Les équations différentielles permettent de modéliser une multitude de problèmes de physique, de chimie, de biologie et d'économie. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions vectorielles

On appelle ***fonction vectorielle*** toute fonction X définie sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui sera $\mathbb{K}^n$ dans ce chapitre. Une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée ***fonction scalaire***. Lorsque $n = 1$, une fonction vectorielle est donc une fonction scalaire.

On munit l'e.v. $\mathbb{K}^n$ d'une de ses normes $\|\cdot\|$ (toutes équivalentes), par exemple celle définie par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction vectorielle $t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{K}^n$ admet une limite $L \in \mathbb{K}^n$ en un point $t_0 \in I$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $t \in I$ vérifie $|t - t_0| < \eta$ alors $\|X(t) - L\| < \varepsilon$. Dans ce cas, le vecteur L est noté $\lim_{t \to t_0} X(t)$.

On note $x_1, \ldots, x_n$ les fonctions composantes de X, définies sur I et à valeurs scalaires, de sorte que pour $t \in I$ on a $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$.

Avec ces notations, nous avons les définitions et résultats suivants.

1. Le vecteur $\lim_{t\to t_0} X(t)$ existe dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\lim_{t\to t_0} x_i(t)$ existe dans $\mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On a dans ce cas $\lim_{t\to t_0} X(t) = \left(\lim_{t\to t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t\to t_0} x_n(t)\right)$.

2. Par définition, X est ***continue*** en t_0 si $\lim_{t\to t_0} X(t) = X(t_0)$. On dit que X est continue sur I si elle est continue en tout point de I. La fonction vectorielle X est continue en t_0 (respectivement sur I) si et seulement si ses composantes $x_1, \dots, x_n$ sont toutes continues en t_0 (respectivement sur I).

3. Par définition, X est ***dérivable*** en t_0 si :
$$\lim_{t\to t_0} \frac{X(t)-X(t_0)}{t-t_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{K}^n$$
Dans ce cas, cette limite est notée $X'(t_0)$ et s'appelle le ***vecteur dérivé*** de X en t_0. La fonction vectorielle X est dérivable en t_0 si et seulement si ses composantes sont toutes dérivables en t_0. Le vecteur dérivé de X en t_0 est alors $X'(t_0) = \big(x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)\big)$. On dit que X est dérivable sur I si elle dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on peut définir la fonction $X' : t \in I \mapsto X'(t) \in \mathbb{K}^n$. Si cette fonction X' est elle-même dérivable en t_0, alors on peut définir le vecteur $X''(t_0)$ comme la dérivée de X' en t_0. Lorsqu'il s'itère, ce procédé permet de définir les dérivées successives de X en t_0, notées $X^{(j)}(t_0)$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition, X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I) si les fonctions $X^{(j)}$ sont définies et continues sur I pour $j \in [\![0,k]\!]$ (respectivement pour tout $j \in \mathbb{N}$). La fonction X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I) si et seulement si chaque composante est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).

1.1.2 Équations différentielles

Définition 1.1 (*Équation différentielle*)

*Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle d'ordre** k est une relation de la forme*
$$F\big(t, X(t), X'(t), \dots, X^{(k)}(t)\big) = 0_{\mathbb{K}^n} \tag{1.1}$$
*où F est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^{k+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Une **solution** de (1.1) est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle $t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{K}^n$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre k en tout point de I, telle que pour tout $t \in I$ on ait $\big(t, X(t), \dots, X^{(k)}(t)\big) \in D$ et l'égalité (1.1). On dit alors que X est une solution de (1.1) sur I.*

Une équation différentielle est donc une relation entre une fonction X (c'est l'*inconnue* de l'équation) d'une variable [1] t et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

1. Dans ce livre, la variable t est réelle, mais on pourrait considérer des équations différentielles pour lesquelles l'inconnue X est une fonction d'une variable complexe (dans ce cas, X doit être *holomorphe* sur un ouvert de $\mathbb{C}$).

Lorsque $n = 1$, on dit que (1.1) est une équation différentielle ***scalaire*** d'ordre k. Dans le cas général, (1.1) est un système (d'ordre k) de n équations différentielles scalaires, également appelé ***système différentiel*** (d'ordre k) de n équations, ou équation différentielle vectorielle d'ordre k.

Exemple 1.1. *Considérons l'équation suivante, où l'inconnue est le couple de fonctions* (x, y) *:*

$$(S) \qquad \begin{cases} t^2 x(t) + x(t)y'(t) = 0 \\ x^2(t) + x''(t) + y''(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Avec les notations de la définition 1.1, on a $n = 2$, $k = 2$, $X(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. *L'équation* (S) *est un système de 2 équations différentielles scalaires dont l'une est d'ordre 2, donc* (S) *est une équation différentielle vectorielle d'ordre 2.*

Exemple 1.2. *Considérons l'équation*

$$(E) \qquad y''y + y' - xy^2 + \mathrm{e}^x = 0$$

Ici, la variable est x *et la fonction inconnue est* y. *Il est fréquent de noter improprement* y *ce qu'on devrait noter* $y(x)$, *la distinction entre la variable et la fonction inconnue découlant du contexte. On a* $n = 1$ *et* $k = 2$, *i.e.* (E) *est une équation scalaire d'ordre 2.*

1.1.3 Quelques situations régies par des équations différentielles

Donnons quelques exemples classiques de situations physiques ou biologiques modélisées par des équations différentielles.

Exemple 1.3. Circuit RC. *On considère un circuit composé d'un générateur de tension, d'une résistance* R *et d'un condensateur de capacité* C.
Notons $e(t)$ *la tension délivrée par le générateur et* $v(t)$ *la tension aux bornes du condensateur. La fonction* v *est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :*

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad RCv'(t) + v(t) = e(t) \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est d'ordre 1. En modifiant le circuit, on obtient une équation d'ordre 2.

Exemple 1.4. Circuit RLC. *On ajoute une inductance* L *entre la résistance et le condensateur. La tension* $v(t)$ *aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :*

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = e(t) \tag{1.3}$$

Considérons maintenant un exemple tout aussi classique mais issu de la mécanique :

Exemple 1.5. Oscillateur harmonique. *On considère un mobile ponctuel de masse* m *soumis à la force de rappel d'un ressort. Notons* $x(t)$ *la différence entre la position du mobile à l'instant* t *et sa position d'équilibre (autrement dit,* $x(t)$ *est l'allongement du ressort). La force de rappel du ressort est proportionnelle à son allongement. Lorsque l'on néglige la force de frottement, en vertu de la relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe du ressort, on obtient l'équation différentielle*

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \tag{1.4}$$

où k *est une constante positive caractéristique de la raideur du ressort. Cette équation se rencontre en fait dans des contextes variés. Il s'agit d'un* oscillateur harmonique.

Un modèle plus réaliste est le suivant :

Exemple 1.6. Oscillations amorties. *Dans l'exemple précédent, lorsque l'on ne néglige pas la force de frottement, on la considère en général proportionnelle à la vitesse du mobile et dirigée en sens inverse du vecteur vitesse. On a donc l'équation différentielle*

$$mx''(t) + ax'(t) + kx(t) = 0 \tag{1.5}$$

où a est une constante positive.

L'exemple suivant est également issu de la mécanique.

Exemple 1.7. Pendule pesant. *On considère un « pendule simple », i.e. un mobile (considéré ponctuel) de masse m attaché à un fil de masse négligeable et de longueur L constante qui oscille sous l'action de la pesanteur, les frottements étant négligés. On repère la position du mobile par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale descendante. Puisque l'on néglige les frottements (c'est une approximation impliquant que le mouvement devrait être perpétuel, elle n'est donc envisageable que sur un petit intervalle de temps à partir de l'instant initial), les seules forces qui s'exercent sur le mobile sont $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$. Lorsque l'on projette la relation fondamentale de la dynamique sur la tangente à la trajectoire, on obtient l'équation différentielle :*

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\,\sin\big(\theta(t)\big) \tag{1.6}$$

Dans cette équation $\theta''(t)$ représente l'accélération angulaire du pendule.
On peut également obtenir (1.6) en écrivant que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante (car on néglige les frottements) et en dérivant par rapport au temps.

L'équation différentielle suivante modélise la *dynamique d'une population.*

Exemple 1.8. Modèle de Verhulst. *On rencontre en écologie le modèle suivant. Notons $n(t)$ le nombre d'individus d'une espèce donnée à l'instant t, dans un milieu donné. En première approximation, on peut considérer que le taux d'accroissement instantané de $n(t)$ est proportionnel à $n(t)$ (il s'agit de la* ***loi de Malthus****), i.e. on a l'équation différentielle $n'(t) = an(t)$ où a désigne le taux de croissance propre de l'espèce considérée (cette constante a peut être positive ou négative car elle dépend du taux de natalité et du taux de mortalité de l'espèce). En réalité, les individus interagissent (par exemple ils doivent se partager les ressources disponibles, ou bien il peut survenir des maladies), ce que* Verhulst *a modélisé en 1840 en diminuant $n'(t)$ d'un facteur proportionnel à la probabilité de rencontre de deux individus. Or, cette probabilité de rencontre est elle-même proportionnelle à $n^2(t)$. Finalement, on obtient l'équation différentielle*[1] *suivante pour $n(t)$:*

$$n'(t) = an(t) - bn^2(t) \tag{1.7}$$

où a et b sont des constantes positives dépendant de l'espèce et du milieu considérés.

1. Bien entendu, comme $n(t)$ doit être un entier naturel, l'équation différentielle (1.7) est nécessairement un modèle mathématique approché.

On peut aussi modéliser par un système différentiel deux populations interagissant :

Exemple 1.9. Modèle proies-prédateurs. *Nous supposons maintenant que deux espèces cohabitent dans un milieu donné : des prédateurs et leurs proies préférées. En négligeant les effets de la cohabitation avec d'autres espèces ainsi que l'influence d'autres facteurs que la reproduction naturelle et la prédation,* ***Lotka*** *et* ***Volterra*** *ont développé (indépendamment l'un de l'autre, respectivement en 1925 et 1926) le modèle suivant. On considère que les proies ont à leur disposition une source quasi-illimitée de nourriture (par exemple de l'herbe pour des herbivores, du plancton pour des petits poissons) alors que la nourriture des prédateurs est évidemment limitée par le nombre de proies. Appelons $x(t)$ (respectivement $y(t)$) le nombre de proies (respectivement de prédateurs) à l'instant t. La nourriture des proies étant considérée illimitée, en l'absence de prédateurs le nombre $x(t)$ de proies augmente suivant la loi de Malthus $x'(t) = ax(t)$ avec $a > 0$. Par contre, en l'absence de proies le nombre de prédateurs ne peut que diminuer en suivant la loi $y'(t) = -by(t)$ avec $b > 0$. Lorsque les deux espèces cohabitent, le nombre de proies est régulé par le nombre de prédateurs. En effet, $x'(t)$ est diminué d'un facteur qui est proportionnel à la probabilité qu'une proie rencontre un prédateur, alors que $y'(t)$ est augmenté d'un facteur proportionnel à la probabilité qu'un prédateur rencontre une proie. Or, la probabilité de rencontre proie-prédateur est elle-même proportionnelle au nombre de proies $x(t)$ et au nombre de prédateurs $y(t)$, donc est proportionnelle à leur produit $x(t)y(t)$.*
Finalement, la situation est régie par le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & ax(t) - cx(t)y(t) \\ y'(t) & = & -by(t) + dx(t)y(t) \end{array}\right. \tag{1.8}$$

où $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ dépendent des espèces et du milieu considérés.

L'exemple suivant modélise la dynamique des lasers.

Exemple 1.10. Dynamique du laser. *En physique des lasers, on s'intéresse au nombre $n(t)$ de photons dans la cavité et à la différence de population $N(t)$ entre le niveau fondamental et le premier niveau excité. Le comportement dynamique du laser est régi par le système d'équations différentielles suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} n'(t) & = & -\frac{1}{\tau_c}n(t) + Kn(t)N(t) \\ N'(t) & = & R_p - \frac{1}{\tau_2}N(t) - Kn(t)N(t) \end{array}\right. \tag{1.9}$$

où K, τ_c, τ_2 et R_p sont des constantes physiques positives (R_p est le taux de pompage, τ_c est le temps de vie moyen des photons dans la cavité et τ_2 est le temps de vie du niveau haut de la transition). Le système (1.9) permet notamment de décrire le régime d'oscillations de relaxation du laser.

Terminons par une modélisation mathématique de la dynamique d'une épidémie.

Exemple 1.11. Modéle épidémiologique SIR**.** *Le système différentiel suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} S'(t) & = & -\frac{a}{N}S(t)I(t) \\ I'(t) & = & \frac{a}{N}S(t)I(t) - bI(t) \\ R'(t) & = & bI(t) \end{array}\right. \tag{1.10}$$

est l'un des plus simples modèles mathématiques permettant de prévoir l'évolution d'une épidémie. Ces modèles ont largement démontré leur importance pratique et leur efficacité. L'exercice 1.8 page 50 explicite la modélisation. Voir aussi l'exercice 4.7 page 217.

1.1.4 Forme normalisée

Définition 1.2 (*Équation normalisée*)

Une équation différentielle d'ordre k est dite ***normalisée*** *si elle s'écrit*

$$X^{(k)}(t) = f\big(t, X(t), ..., X^{(k-1)}(t)\big) \tag{1.11}$$

où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^k$, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Autrement dit, une équation différentielle d'ordre k est normalisée si elle est *résolue en $X^{(k)}$*.

Exemple 1.12. *La forme normalisée de $y''y + y' - xy^2 + \mathrm{e}^x = 0$ est $y'' = -\frac{y'}{y} + xy - \frac{\mathrm{e}^x}{y}$.*

Remarque 1.1. *Dans l'exemple 1.12, la forme normalisée interdit de considérer des solutions y s'annulant sur leur intervalle de définition. En général, la forme normalisée d'une équation différentielle* ***n'est pas équivalente*** *à l'équation initiale. Plus précisément, si nous notons (E') la forme normalisée d'une équation différentielle (E), une solution sur un intervalle I de l'équation (E') est évidemment solution sur I de (E) mais la réciproque est fausse.*

1.1.5 Régularité des solutions.

Pour une équation *normalisée*, on peut préciser à l'avance la *régularité* des solutions.

Proposition 1.1 (*Régularité des solutions*)

On considère l'équation différentielle normalisée (1.11) où f est une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^k$, à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert D, alors les solutions de (1.11) sont de classe $\mathcal{C}^{k+p}$ sur leur intervalle de définition.

Rappelons que dire que f est de classe $\mathcal{C}^p$ (respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur l'ouvert D signifie que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p (respectivement de tout ordre) continues sur D.

Démonstration. Soit X une solution de (1.11) sur un intervalle I. On raisonne par récurrence sur p.

Initialisation. Le cas $p = 0$ correspond à f continue sur D. Toute solution d'une équation différentielle d'ordre k étant par définition k fois dérivable sur I, la fonction $t \mapsto \big(t, X(t), \ldots, X^{(k-1)}(t)\big)$ est dérivable sur I, donc continue sur I. La fonction $t \mapsto f\big(t, X(t), \ldots, X^{(k-1)}(t)\big) = X^{(k)}(t)$ est donc continue sur I par composition d'applications continues, *i.e.* X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Progression. Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur D, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$, donc la solution X est par hypothèse de récurrence de classe $\mathcal{C}^{k+p}$ sur I. Cela implique que la fonction $t \mapsto \big(t, X(t), \ldots, X^{(k-1)}(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+p-(k-1)} = \mathcal{C}^{p+1}$ sur I. La fonction $t \mapsto f\big(t, X(t), \ldots, X^{(k-1)}(t)\big) = X^{(k)}(t)$ est donc de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. Ainsi, la solution X est de classe $\mathcal{C}^{k+p+1}$ sur I. $\square$

Corollaire 1.1

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert D, alors les solutions de (1.11) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition.

1.1.6 Réduction à un système du premier ordre

En ajoutant des inconnues, il est toujours possible de ramener une équation normalisée d'ordre $k \geq 2$ à une équation normalisée du premier ordre. La réduction au premier ordre est un préalable à l'étude du ***problème de Cauchy***[1], que nous ferons au paragraphe 1.2. L'exemple suivant permet de comprendre cette technique de réduction.

Exemple 1.13. *Considérons le système différentiel d'ordre* 2 *suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) = x^2(t)\, y'(t) \\ y''(t) = tx'(t) + y'(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

On pose $u(t) = x'(t), v(t) = y'(t)$. Le système devient :

$$\begin{cases} x'(t) = u(t) \\ y'(t) = v(t) \\ u'(t) = x^2(t)\, v(t) \\ v'(t) = tu(t) + v(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

Ainsi, on a ramené une équation d'ordre 2 *à inconnue $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$ à une équation d'ordre* 1 *à inconnue $t \mapsto Y(t) = (x(t), y(t), u(t), v(t))$.*

Un cas particulier important est celui de la réduction au premier ordre d'une équation **scalaire** d'ordre k normalisée :

$$y^{(k)}(t) = f\big(t, y(t), \dots, y^{(k-1)}(t)\big) \tag{1.12}$$

où l'inconnue y et la fonction f sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. En introduisant $k-1$ inconnues auxiliaires, (1.12) devient le système du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} y'(t) & = & y_1(t) \\ y_1'(t) & = & y_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-2}'(t) & = & y_{k-1}(t) \\ y_{k-1}'(t) & = & f\big(t, y(t), y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)\big) \end{cases} \tag{1.13}$$

Noter que les inconnues introduites sont en fait les $y_j = y^{(j)}$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$.

1.2 Le problème de Cauchy

1.2.1 Formulations du problème

On considère une équation différentielle d'ordre 1 **normalisée** :

$$X'(t) = f\big(t, X(t)\big) \tag{1.14}$$

1. En outre, la réduction au premier ordre permet de mettre en œuvre les techniques de **résolution numérique** des équations différentielles.

Dans (1.14), f est une fonction définie sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, et la fonction inconnue $t \mapsto X(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Le fait de considérer seulement une équation d'ordre 1 n'est pas restrictif pour l'étude théorique. En effet, lorsque l'équation est d'ordre supérieur à 1, on peut la ramener au premier ordre par le procédé décrit au paragraphe 1.1.6.

Définition 1.3 (*Problème de Cauchy*)

*Soit $(t_0, X_0) \in \Omega$. Le **problème de Cauchy** est la recherche des solutions de l'équation différentielle (1.14) vérifiant la **condition initiale***

$$X(t_0) = X_0 \tag{1.15}$$

*La condition initiale (1.15) est appelée aussi **condition de Cauchy** et (t_0, X_0) est la **donnée de Cauchy**.*

Remarque 1.2. *Le fait que l'équation différentielle (1.14) soit **normalisée** implique que la donnée de $\big(t_0, X(t_0)\big)$ **détermine** la valeur de $X'(t_0)$:*

$$X'(t_0) = f\big(t_0, X(t_0)\big) = f(t_0, X_0) \tag{1.16}$$

*Par conséquent, se donner une condition $X'(t_0) = Z_0$ **en plus de** $X(t_0) = X_0$ est soit inutile (lorsque $Z_0 = f(t_0, X_0)$, car c'est alors une information redondante), soit est un problème sans solution (lorsque $Z_0 \neq f(t_0, X_0)$). **La situation est plus compliquée pour une équation non normalisée** $f\big(t, X(t), X'(t)\big) = 0$.*

En s'appuyant sur l'intuition physique, on peut espérer que le problème de Cauchy admette « dans les bons cas » une **unique solution**.

Exemple 1.14. Relation fondamentale de la dynamique. *On considère un mobile ponctuel de masse m dont on note $M(t)$ la position instantanée. L'espace $\mathbb{R}^3$ est supposé rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Notons $\overrightarrow{F}(M)$ la somme des forces s'appliquant au mobile.*
*La relation fondamentale de la dynamique $m\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}(M)$ implique que le mouvement est régi par un système de 3 équations différentielles scalaires d'ordre 2, obtenues par projection sur les 3 axes. Considérer une condition de Cauchy revient ici à choisir un instant initial t_0 et à se donner non seulement la **position initiale** $M(t_0)$ mais aussi la **vitesse initiale** $\vec{v}(t_0) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ (pour le **même instant initial** t_0). En effet, la réduction au premier ordre décrite au paragraphe 1.1.6 revient à poser :*

$$X(t) = \left(\overrightarrow{OM(t)}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t), v_1(t), v_2(t), v_3(t)\big)$$

ce qui permet d'écrire le système de 3 équations différentielles scalaires d'ordre 2 comme un système de 6 équations différentielles scalaires d'ordre 1. Cette réduction au premier ordre est détaillée page 185 : on obtient le système différentiel (4.10).
La donnée de la valeur de $X(t_0) = \big(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), v_1(t_0), v_2(t_0), v_3(t_0)\big)$, conjointement à ce système de 6 équations, est un problème de Cauchy.

Équations fonctionnelles

Équations différentielles, équations intégrales et équations aux dérivées partielles

Cet ouvrage traite d'équations différentielles (linéaires et non-linéaires) et d'équations aux dérivées partielles (EDP). Il présente des méthodes de résolution rigoureuses pour les problèmes où l'on peut obtenir les solutions sans recourir aux méthodes numériques.

Il se destine aux étudiants en L3 ou master de mathématiques et de physique, en écoles d'ingénieurs, à ceux préparant l'agrégation de mathématiques et aux enseignants de mathématiques ou de physique.

Sa lecture est abordable avec un niveau CPGE ou licence en analyse et algèbre linéaire.

Tenant compte des très nombreux exemples et exercices corrigés, traités en détail et souvent issus de la physique, c'est un outil complet pour les physiciens et les élèves-ingénieurs s'intéressant aux problèmes modélisés par une équation différentielle ou une EDP.

Le livre comporte également un bon nombre de développements – bien identifiés – destinés aux étudiants préparant l'agrégation de mathématiques, ou souhaitant développer une culture scientifique utile dans ces domaines, avant une spécialisation de niveau master.

Le livre comporte 30 figures originales et 90 exercices ou problèmes corrigés, classiques ou plus personnels.

Patrice Struillou est professeur agrégé de mathématiques et enseigne à l'École Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie de Lannion. Il est responsable des enseignements de mathématiques de l'ENSSAT ainsi que de l'organisation d'oraux de mathématiques, en coordination avec des collègues de CPGE, dans le cadre d'un concours de la banque Mines Ponts.

www.editions-ellipses.fr

9 782340 080386