Tle

Nicolas Nguyen
Stéphane Daniel
Mathieu Fontes

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES EXPERTES

2e édition

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1

Nombres complexes: point de vue algébrique

La découverte d'un nouvel ensemble de nombres contenant des carrés négatifs est en général surprenant. Lorsque, de plus, on se rend compte que ces nouveaux venus simplifient certains calculs, que la trigonométrie en découle et qu'ils permettent des résolutions en géométrie, on comprend aisément la place importante qu'ils ont prise en mathématiques.

Un mathématicien

En 1545, Jérôme **Cardan** publie un ouvrage dans lequel on trouve pour la première fois une formule donnant les solutions des équations du troisième degré. Pour certaines d'entre elles, l'application de la formule faisait apparaître l'expression $\sqrt{-1}$ qui se simplifiait par miracle, fournissant le bon résultat. Le mathématicien italien Rafaele **Bombelli** (1526-1573) propose alors de créer de nouveaux nombres, que l'on ne nomme pas encore nombres complexes, puis il définit dessus des règles pour les opérations d'addition et multiplication. Un nouvel ensemble de nombres était né !

LE SAVIEZ-VOUS ?

Tout polynôme P de degré n, à coefficients complexes, se factorise en produit de n monômes de degré 1 ; en d'autres termes, P possède exactement n racines distinctes ou confondues. Pour un polynôme P de degré supérieur ou égal à 2 ayant toutes ses racines de module inférieur ou égal à 1, le mathématicien bulgare Blagovast **Sendov** (1932-2020) a conjecturé que pour toute racine a de P, il existe une racine de P′ distante d'au plus 1 de a. Pour un polynôme de degré 2, c'est facile à montrer mais personne n'a jamais su le prouver pour un polynôme de degré quelconque.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Effectuer des calculs avec les nombres complexes
- Mettre un nombre complexe sous forme algébrique
- Montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur
- Résoudre une équation linéaire de la forme $az = b$

et plus si affinités

- Résoudre une équation faisant intervenir z et $\overline{z}$
- Calculer des sommes à l'aide de la formule du binôme

Résumé de cours

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Théorème-Définition 1.1.— Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, que l'on appelle ensemble des nombres complexes et vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont réels ;
- l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$ avec les mêmes règles de calcul.

Définition : *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z. On dit que a est la **partie réelle** de z et que b est sa **partie imaginaire**. On note $a = \mathfrak{Re}\,(z)$ et $b = \mathfrak{Im}\,(z)$.*

Remarque : un nombre complexe est un réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle.

Définition : *Un **imaginaire pur** est un nombre complexe de la forme $z = ib$ (avec $b \in \mathbb{R}$).*

Remarque : un nombre complexe est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.

Théorème 1.2.— Unicité de la forme algébrique —. Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Autrement dit :

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z) = \mathfrak{Re}\,(z') \text{ et } \mathfrak{Im}\,(z) = \mathfrak{Im}\,(z')}$$

Théorème 1.3.— Opérations sur les nombres complexes —. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$). Alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Remarque : les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$, en particulier

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Théorème 1.4.— Inverse d'un nombre complexe non nul —. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors z admet un inverse que l'on note $\frac{1}{z}$ et on a :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}}$$

Remarque : dire que $z = a + ib$ est un nombre complexe non nul équivaut à dire que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, soit $a^2 + b^2 \neq 0$.

■ Conjugué d'un nombre complexe

Définition : *Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle* ***conjugué*** *de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.*

Exemple : si $z = 3$ et $z' = -1 + 2i$, alors $\overline{z} = 3$ et $\overline{z'} = -1 - 2i$.

Remarque : si $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Proposition 1.5.— Propriétés la conjugaison —. Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Remarque : si z est un nombre complexe non nul, alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, ce qui permet de déterminer l'écriture algébrique de $\frac{1}{z}$ puisque $z\overline{z}$ est un réel.
En effet, si $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Théorème 1.6.— Soit z un nombre complexe. Alors :

- $\mathfrak{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\mathfrak{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Théorème 1.7.— Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur —. Soit z un nombre complexe. Alors :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

■ Formule du binôme de Newton

Théorème 1.8.— Formule du binôme —. Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel. Alors :

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Exemple : pour $n \in \{0,1,2,3,4\}$ on obtient (voir **méthode 1.8**)

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b$$
$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Remarque : en changeant b en $-b$ dans la formule du binôme, on obtient le développement de $(a-b)^n$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}$$

Par exemple :

$$(a-b)^4 = a^4 + 4a^3 \times (-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

En appliquant la formule du binôme à $a = 1$ et $b = 1$, on retrouve la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ déjà calculée en dénombrement :

Théorème 1.9.— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Démonstrations

Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière

Il s'agit de démontrer les troisième, quatrième et sixième points de la **proposition 1.5**.

Proposition 1.5.— Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Démonstration $\triangledown$

Rappelons que, pour un nombre complexe $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on a $\overline{z} = a - ib$.

$\boxed{1}$ **Conjugué d'un produit**

Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) deux nombres complexes.
On a $zz' = ac - bd + i(ad + bc)$, d'où $\overline{zz'} = ac - bd - i(ad + bc)$. Par ailleurs,

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc + i^2bd = ac - iad - ibc - bd = ac - bd - i(ad + bc),$$

ce qui montre que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\boxed{2}$ **Conjugué d'un inverse**

Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$), un nombre complexe non nul. On a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2},$$

donc

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Ainsi, on a bien $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

$\boxed{3}$ **Conjugué d'une puissance entière**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathcal{P}(n) : \ll \ \overline{z^n} = (\overline{z})^n \ \gg .$$

Initialisation : On a $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = 1^0 = \overline{1}^0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
En appliquant la formule donnant le conjugué d'un produit, on a alors :

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

■ Formule du binôme

Théorème 1.8.— Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel. Alors :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Démonstration ▽

Notons tout d'abord que la deuxième égalité résulte de la première en échangeant a et b. En effet, comme $a+b=b+a$, on déduit de la première égalité que :

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On va maintenant démontrer la première égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \ll\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\ \gg.$$

Initialisation : On a $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n \underset{\mathcal{P}(n)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

soit

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}. \tag{1.1}$$

Or, la première somme ci-dessus peut également se mettre sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^{n+1} b^n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}.$$

Par conséquent, la relation (1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Mais $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ d'après la **formule de Pascal**, d'où :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Enfin, comme $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n+1}{n+1} = 1$, l'égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲