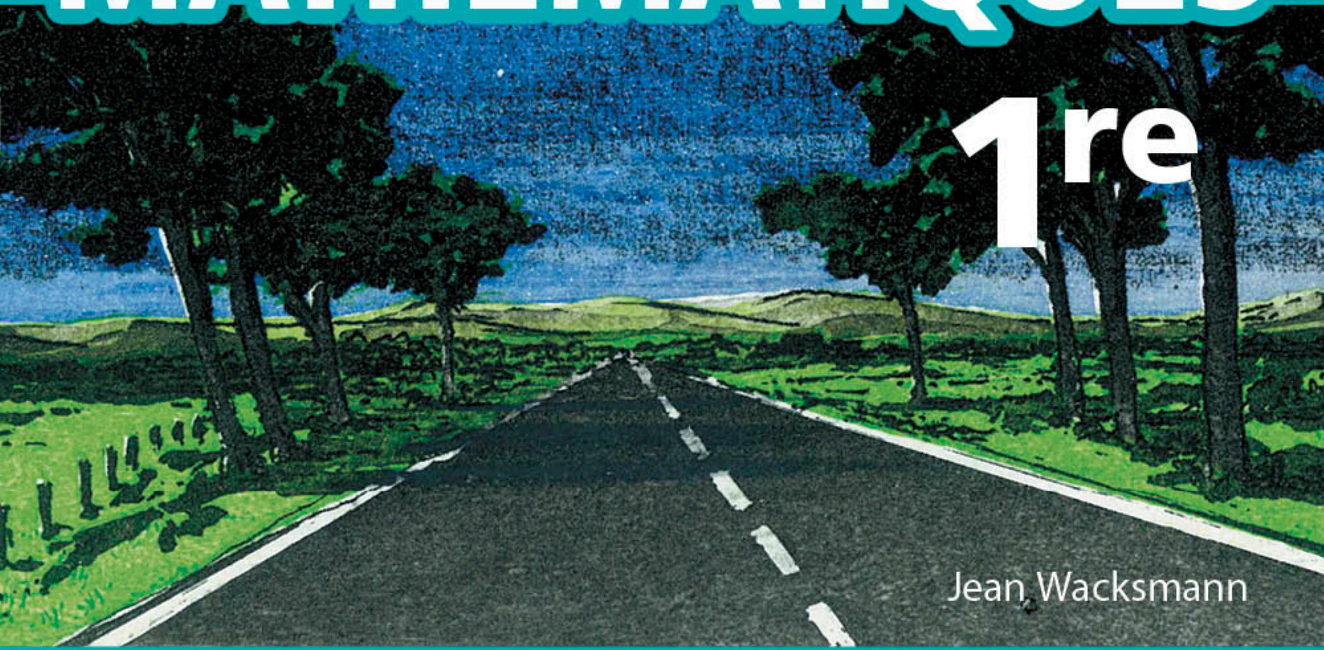
SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES



1re

Jean Wacksmann

Pour aller plus loin

en démontrant et en s'entraînant

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

CHAPITRE 1

Second degré

L'étude des équations du second degré apparait pour la première fois à la période babylonienne qui se situe environ 2000 ans avant notre ère.

Il s'agit de tablettes en terre cuite découvertes par les archéologues à partir du milieu du XIX^{e} siècle et difficilement exploitables puisque leur compréhension date du milieu du XX^{e} siècle. La résolution de ces équations est géométrique et correspond pour chacune à un cas particulier.

Au III^{e} siècle avant notre ère, dans les Éléments d'Euclide, certains résultats géométriques sont très proches de la résolution d'une équation du second degré.

Au IX^{e} siècle le mathématicien arabe Al-Khwarizmi (780-850) propose la résolution algébrique illustrée géométriquement de six formes d'équations du second degré.

Il faudra attendre le XVII^{e} siècle pour que la résolution d'une équation du second degré se mette en place telle que nous la connaissons de nos jours.

Nous complétons l'étude des fonctions trinômes du second degré établie en classe de Seconde par la résolution générale d'une équation polynomiale de degré 2.

Dans ce premier chapitre, nous proposons des exercices d'approfondissement conformes au programme et pour aller plus loin, nous donnons des compléments au sujet :

- du discriminant réduit,
- de la somme et du produit des racines,
- de la résolution d'équations ou d'inéquations irrationnelles,
- des équations d'un cercle.

1.1 Résolution d'une équation du second degré

Proposition (forme canonique d'un trinôme)**.**

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme de second degré.

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, la forme canonique de f est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Démonstration.

Pour tout réel x et puisque $a \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),\\
f(x) &= a\left[x^2 + 2 \times (\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\right],\\
f(x) &= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],\\
f(x) &= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].
\end{aligned}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, nous obtenons en conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Exemple.

Pour déterminer la forme canonique d'un trinôme nous disposons de deux méthodes, soit en appliquant l'égalité obtenue à la proposition précédente, soit en explicitant en situation les calculs de la preuve ci-dessus.

Nous considérons le trinôme p défini, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, par

$$p(x) = 2x^2 - \sqrt{3}x - 2.$$

Méthode 1.

Nous avons $a = 2$, $b = -\sqrt{3}$ et $c = -2$, ce qui donne

$$\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 19,$$

nous en déduisons

$$p(x) = 2\left[(x - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 - \frac{19}{16}\right].$$

Méthode 2.

Nous avons, pour tout réel x,

$$p(x) = 2\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 1\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x^2 - 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{4}) \times x + (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 - (\frac{\sqrt{3}^2}{4}) - 1\right), \\ &= 2\left[(x - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 - \frac{3}{16} - 1\right], \\ &= 2\left[(x - \frac{\sqrt{3}}{4})^2 - \frac{19}{16}\right]. \end{aligned}$$

Proposition (résolution d'une équation du second degré)**.**

Soit (E) l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. Selon le signe du réel Δ qui est le discriminant de (E), nous disposons de la disjonction suivante :

***1**^er^ **cas** : $\Delta > 0$.*

L'équation (E) admet deux solutions distinctes x' ou x'' telles que

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

***2**^e^ **cas** : $\Delta = 0$.*

L'équation (E) admet une unique solution,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

***3**^e^ **cas** : $\Delta < 0$.*

L'équation (E) n'a pas de solution.

Démonstration.

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Nous utilisons la forme canonique établie à la proposition précédente.

1$^{\text{er}}$ cas : $\Delta > 0$. Puisque $a \neq 0$, il vient

$$\begin{aligned}
(E) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0, \\
\Leftrightarrow \left((x + \frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0, \\
\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0, \\
\Leftrightarrow x = x' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ cas : $\Delta = 0$. Puisque $a \neq 0$, nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

3$^{\text{e}}$ cas : $\Delta < 0$. Nous avons

$$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

avec

$$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0 \text{ et } \frac{\Delta}{4a^2} < 0,$$

ce qui est contradictoire.

Nous en concluons dans ce cas que l'équation (E) a un ensemble vide de solution.

Remarques.

- Les équations particulières du second degré du type :

$$x^2 = c,\ ax^2 + bx = 0,\ ax^2 + c = 0 \text{ n'appellent pas le calcul de } \Delta.$$

Elles se résolvent comme en classes de Seconde ou de Troisième.

- Lorsque $\Delta = 0$, cela signifie que ax^2+bx+c est une identité remarquable. La résolution est également directe.
- $a \neq 0$ car sinon l'équation (E) est du premier degré.

Exemples.

1$^{\text{er}}$ exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Cette équation appelle le calcul de son discriminant.

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 10 > 0,$$

ce qui induit deux solutions distinctes

$$x' = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} \text{ ou } x'' = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}.$$

2$^{\text{e}}$ exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Cette équation n'appelle pas le calcul de son discriminant car nous pouvons observer que, pour tout réel x,

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2.$$

Nous en concluons que cette équation admet pour unique solution

$$x = \frac{3}{2}.$$

3$^{\text{e}}$ exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

$$\sqrt{2}x - 5x^2 = 0.$$

De même, cette équation n'appelle pas le calcul de son discriminant. Il vient

$$(E) \Leftrightarrow x(\sqrt{2} - 5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Algorithme (de résolution)**.**

Nous proposons le script suivant de résolution d'une équation du second degré.

```
def seconddegre(a,b,c):
    discriminant=b**2-4*a*c
    if discriminant<0 :
        return ["pas de solution"]
    if discriminant==0:
        x=-b/(2*a)
        return[x]
    if discriminant>0:
        d=discriminant**0.5
        x1=(-b-d)/(2*a)
        x2=(-b+d)/(2*a)
        return[x1,x2]
```

Après exécution, nous obtenons dans la console, les exemples suivants :

```
>>> seconddegre(1,1,1)
['pas de solution'],
>>> seconddegre(1,2,-3)
[-3.0, 1.0],
>>> seconddegre(1,2,1)
[-1.0],
>>> seconddegre(2,2**0.5,-1)
[-1.1441228056353687, 0.4370160244488211].
```

Remarque.

Nous remarquons dans le dernier exemple que les résultats affichés sont des valeurs approchées des solutions.

Pour obtenir une résolution exacte, nous pouvons utiliser un logiciel de calcul formel comme par exemple Xcas.

```
1 solve(2*x^2+sqrt(2)*x-1=0)
```

$$\left[\frac{-(\sqrt{2})-(\sqrt{10})}{4}, \frac{-(\sqrt{2})+\sqrt{10}}{4}\right]$$

Corollaire (factorisation d'un trinôme de degré 2)**.**

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ *et* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *un trinôme de second degré.*

***1**^er **cas** :* $\Delta > 0$.

Avec les notations de la proposition précédente, pour tout réel x*, nous avons*

$$f(x) = a(x - x')(x - x").$$

***2**^e **cas** :* $\Delta = 0$. *Pour tout réel* x*, nous avons*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Démonstration.

1^er cas : $\Delta > 0$. En reprenant la forme canonique de f, pour tout réel x, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= \left((x + \frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \\ &= \left(x - (-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right)\left((x - (-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right), \\ &= a(x - x')(x - x''). \end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ cas : $\Delta = 0$. Dans ce cas, à partir de la forme canonique de f nous avons immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Exemple.

Nous souhaitons factoriser le trinôme $f : x \mapsto 2x^2 - (2\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$.

Nous avons

$$\Delta = (-(2\sqrt{2} - 1))^2 - 4 \times 2 \times (-\sqrt{2}) = 9 + 4\sqrt{2} > 0.$$

En remarquant que

$$9 + 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)^2,$$

nous en déduisons les deux solutions distinctes x', x'' de l'équation $f(x) = 0$:

$$x' = \frac{2\sqrt{2} - 1 - (2\sqrt{2} + 1)}{4} = -\frac{1}{2},$$
$$x'' = \frac{2\sqrt{2} - 1 + (2\sqrt{2} + 1)}{4} = \sqrt{2}.$$

Il en résulte qu'une factorisation de ce trinôme de degré 2 est, pour tout réel x,

$$f(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - \sqrt{2}) = (2x + 1)(x - \sqrt{2}).$$

Corollaire (discriminant réduit)**.**

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On suppose que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $b = 2b'$ et en posant $\Delta' = b'^2 - ac$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x' ou x'' telles que

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ ou } x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Démonstration.

Avec les données de l'énoncé, nous obtenons

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'.$$

Nous observons que $\Delta > 0$ implique $\Delta' > 0$.

De plus, il vient :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a},$$
ou
$$x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'+\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Remarque.

Le réel Δ' est le discriminant réduit de l'équation (E).

Exemple.

Nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$. Son discriminant réduit est

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - (-3) = 6.$$

Il en résulte que les solutions de cette équation sont

$$x' = \sqrt{3} - \sqrt{6} \text{ ou } x'' = \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

1.2 Résolution d'une inéquation du second degré

Proposition (signe d'un trinôme)**.**

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme de second degré.

1er cas *: $\Delta > 0$, f admet deux racines x' et x'' telles que $x' < x''$.*

Pour tout réel x, le trinôme f est :

• du signe de a à l'extérieur des deux racines x' et x'', c'est-à-dire pour $x \in]-\infty, x'[\cup]x'', +\infty[$.

• du signe contraire de a entre les deux racines, c'est-à-dire pour $x \in]x', x''[$.

2e cas *: $\Delta \leq 0$.*

Pour tout réel x, le trinôme f est du signe du réel a.

Démonstration.

1er cas : $\Delta > 0$.

En utilisant le corollaire précédent de factorisation, nous savons que, pour tout réel x,

$$f(x) = a(x - x')(x - x''),$$

ce qui permet, selon le signe de a, de déterminer le signe du trinôme $f(x)$ en formant les deux tableaux de signes qui suivent.