

Olivier Lafitte

Master

# Problèmes d'optimisation continue

Avec corrigés et rappels de cours



ellipses

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Résumé de cours et quelques extensions</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Résumé de cours</b>	<b>3</b>
1.1	Optimisation en général . . . . .	6
1.2	Programme convexe . . . . .	10
1.3	Algorithmes de minimisation . . . . .	12
1.4	Formulations variationnelles . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Relations entre l'optimisation et l'apprentissage</b>	<b>15</b>
2.1	Programme quadratique et noyaux reproduisants . . . . .	15
2.2	Problème général . . . . .	18
2.3	Méthode SVM et optimisation . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Description des problèmes</b>	<b>23</b>
<b>II</b>	<b>Problèmes posés dans un cadre théorique</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Formulation variationnelle de <math>-u'' = 1</math></b>	<b>27</b>
4.1	Enoncé . . . . .	27
4.1.1	Dimension infinie . . . . .	27
4.1.2	Problème discret . . . . .	28
4.2	Correction . . . . .	29
4.2.1	Dimension infinie . . . . .	29
4.2.2	Problème discret . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Equation <math>-u'' = x</math></b>	<b>31</b>
5.1	Enoncé . . . . .	31
5.2	Correction . . . . .	33

<b>6</b>	<b>Fonctionnelle quartique (I)</b>	<b>39</b>
6.1	Enoncé . . . . .	39
6.1.1	Partie I . . . . .	39
6.1.2	Partie II . . . . .	40
6.1.3	Partie III . . . . .	41
6.2	Correction . . . . .	43
6.2.1	Partie I . . . . .	43
6.2.2	Partie II . . . . .	44
6.2.3	Partie III . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Fonctionnelle quartique (II)</b>	<b>49</b>
7.1	Enoncé . . . . .	49
7.1.1	Propriétés de la fonctionnelle . . . . .	49
7.1.2	Discrétisation et projection des solutions . . . . .	50
7.1.3	Comportement des solutions . . . . .	51
7.1.4	Solution d'une équation différentielle . . . . .	51
7.2	Correction . . . . .	52
7.2.1	Propriétés . . . . .	52
7.2.2	Discrétisation . . . . .	54
7.2.3	Comportement des solutions . . . . .	60
7.2.4	Solution d'une équation différentielle . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Régularisation quartique (III)</b>	<b>63</b>
8.1	Enoncé . . . . .	63
8.1.1	Fonctionnelles à étudier et calcul . . . . .	63
8.1.2	Approximation en dimension finie I . . . . .	64
8.1.3	Approximation en dimension finie II : relaxation . . . . .	65
8.1.4	Approximation en dimension finie III : gradient . . . . .	65
8.2	Correction . . . . .	66
8.2.1	Fonctionnelles à étudier et calcul . . . . .	66
8.2.2	Approximation en dimension finie I . . . . .	68
8.2.3	Approximation en dimension finie II : relaxation . . . . .	69
8.2.4	Approximation en dimension finie III : gradient . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Fonctionnelle avec terme <math>(u')^4</math></b>	<b>71</b>
9.1	Enoncé . . . . .	71
9.2	Correction . . . . .	73
<b>10</b>	<b>Fonctionnelle avec RELU</b>	<b>77</b>
10.1	Enoncé . . . . .	77
10.2	Correction . . . . .	79

<b>11 Fonctionnelle non <math>C^2</math></b>	<b>81</b>
11.1 Enoncé . . . . .	81
11.2 Correction . . . . .	82
<b>12 Equation <math>-\Delta y + y^3 = u</math></b>	<b>87</b>
12.1 Enoncé . . . . .	87
12.2 Correction . . . . .	89
<b>13 Equation <math>-u'' = \sqrt{1 + u^2}</math></b>	<b>91</b>
13.1 Enoncé . . . . .	91
13.1.1 Propriétés de $J$ . . . . .	91
13.1.2 Equation avec terme source . . . . .	92
13.1.3 Inégalités sur la solution . . . . .	93
13.1.4 Approximations sur la solution . . . . .	93
13.1.5 Méthode d'approximation de la solution . . . . .	94
13.2 Correction . . . . .	94
13.2.1 Propriétés de $J$ . . . . .	94
13.2.2 Equation avec terme source . . . . .	96
13.2.3 Inégalités sur la solution . . . . .	97
13.2.4 Approximations sur la solution . . . . .	98
13.2.5 Méthode d'approximation de la solution . . . . .	99
<b>14 Fonctionnelle avec terme oscillant</b>	<b>101</b>
14.1 Enoncé . . . . .	101
14.2 Correction . . . . .	103
<b>15 Somme de fonctions convexes</b>	<b>111</b>
15.1 Enoncé . . . . .	111
15.1.1 Cas particulier de deux fonctions . . . . .	111
15.1.2 Cas particulier de $n$ fonctions quadratiques . . . . .	111
15.1.3 Une somme d'exponentielles . . . . .	112
15.1.4 Principe du min-max . . . . .	112
15.1.5 Conditions mixtes (égalité-inégalité) . . . . .	113
15.2 Correction . . . . .	114
15.2.1 Cas particulier de deux fonctions . . . . .	114
15.2.2 Cas particulier de $n$ fonctions quadratiques . . . . .	116
15.2.3 Une somme d'exponentielles . . . . .	117
15.2.4 Principe du min-max . . . . .	117
15.2.5 Conditions mixtes . . . . .	118

<b>16 Somme d'espaces de Hilbert</b>	<b>121</b>
16.1 Enoncé . . . . .	121
16.2 Correction . . . . .	123
<b>17 Combinaison <math>J_1 + \epsilon^{-1}J_2</math></b>	<b>125</b>
17.1 Enoncé . . . . .	125
17.2 Correction . . . . .	127
<b>18 Construction des splines cubiques</b>	<b>131</b>
18.1 Enoncé : PARTIE I . . . . .	131
18.1.1 Etude de $J_0$ . . . . .	131
18.1.2 Etude de $J_\epsilon$ . . . . .	132
18.1.3 Minimum de $J_0$ avec pénalisation . . . . .	132
18.1.4 Résultat général de calcul des variations . . . . .	133
18.1.5 Enoncé PARTIE II . . . . .	133
18.1.6 Recherche de la spline d'ajustement . . . . .	133
18.1.7 Recherche de la spline d'interpolation . . . . .	134
18.2 Correction PARTIE I . . . . .	135
18.2.1 Etude de $J_0$ . . . . .	135
18.2.2 Etude de $J_\epsilon$ . . . . .	136
18.2.3 Minimum de $J_0$ avec pénalisation . . . . .	137
18.2.4 Résultat général de calcul des variations . . . . .	138
18.2.5 PARTIE II; Optimisation en $N + 1$ points . . . . .	138
18.2.6 Recherche de la spline d'interpolation . . . . .	139
<b>19 Abscisse curviligne</b>	<b>143</b>
19.1 Enoncé . . . . .	143
19.1.1 Une fonctionnelle sur $H^1([0, 1])$ . . . . .	143
19.1.2 La fonctionnelle dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	144
19.1.3 Discrétisation . . . . .	144
19.2 Correction . . . . .	145
19.2.1 Une fonctionnelle sur $H^1([0, 1])$ . . . . .	145
19.2.2 La fonctionnelle dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	150
19.2.3 Discrétisation . . . . .	152
<b>20 Recherche de valeurs propres</b>	<b>155</b>
20.1 Enoncé . . . . .	155
20.2 Correction . . . . .	157

<b>21</b>	<b>Approximation de l'intégrale</b>	<b>161</b>
21.1	Enoncé . . . . .	161
21.1.1	Partie générale . . . . .	161
21.1.2	Régularité $L^2$ et régularité $H^1$ . . . . .	162
21.1.3	Calcul explicite avec un point . . . . .	162
21.2	Correction . . . . .	163
21.2.1	Partie générale . . . . .	163
21.2.2	Régularité $H^1$ et régularité $L^2$ . . . . .	164
21.2.3	Calcul explicite avec un point . . . . .	165
<b>22</b>	<b>Domaine avec un trou</b>	<b>169</b>
22.1	Enoncé . . . . .	169
22.1.1	Calcul fonctionnel et convexité . . . . .	169
22.1.2	Equation différentielle ordinaire et sa solution . . . . .	170
22.1.3	Méthode numérique (modes sinusoidaux) . . . . .	170
22.1.4	Trou en dimension 2 . . . . .	171
22.2	Correction . . . . .	173
22.2.1	Convexité . . . . .	173
22.2.2	EDO . . . . .	176
22.2.3	Méthode numérique (modes sinusoidaux) . . . . .	178
22.2.4	Trou en dimension 2 . . . . .	180
<b>III</b>	<b>Minimisation de fonctionnelles pour des applications à d'autres domaines des sciences</b>	<b>183</b>
<b>23</b>	<b>Mécanique du solide</b>	<b>185</b>
23.1	Enoncé . . . . .	185
23.1.1	Calculs préliminaires . . . . .	185
23.1.2	Calcul fonctionnel et convexité . . . . .	186
23.1.3	Résolution de problèmes de minimisation . . . . .	186
23.1.4	Inégalités utilisant l' $\alpha$ -convexité . . . . .	187
23.2	Correction . . . . .	188
23.2.1	Calculs préliminaires . . . . .	188
23.2.2	Calcul fonctionnel et convexité . . . . .	189
23.2.3	Résolution de problèmes de minimisation . . . . .	191
23.2.4	Inégalités utilisant l' $\alpha$ -convexité . . . . .	192
<b>24</b>	<b>Cordes vibrantes-Système électrique</b>	<b>195</b>
24.1	Enoncé . . . . .	195
24.1.1	Partie I . . . . .	195

24.1.2	Partie II . . . . .	197
24.2	Correction . . . . .	198
24.2.1	Partie I . . . . .	198
24.2.2	Partie II . . . . .	200
<b>25</b>	<b>Position d'un fil pesant</b>	<b>203</b>
25.1	Enoncé . . . . .	203
25.1.1	Question 1 : un problème continu sans bornes . . . . .	203
25.1.2	Question 2 : une fonctionnelle positive continue . . . . .	204
25.1.3	Question 3 : approximation en dimension finie . . . . .	205
25.2	Correction . . . . .	205
25.2.1	Question 1 : un problème continu sans bornes . . . . .	205
25.2.2	Question 2 : une fonctionnelle positive continue . . . . .	210
25.2.3	Question 3 : approximation en dimension finie . . . . .	210
<b>26</b>	<b>Production d'énergie et optimisation</b>	<b>213</b>
26.1	Enoncé . . . . .	213
26.2	Correction . . . . .	214
<b>27</b>	<b>Méthode ACP</b>	<b>217</b>
27.1	Enoncé . . . . .	217
27.2	Correction . . . . .	218
<b>28</b>	<b>Stokes non linéaire</b>	<b>221</b>
28.1	Enoncé . . . . .	221
28.1.1	Problème linéaire . . . . .	221
28.1.2	Problème non linéaire (partie plus délicate, à aborder après la section suivante) . . . . .	222
28.1.3	Algorithme pour résoudre le problème de Stokes . . . . .	223
28.2	Correction . . . . .	225
28.2.1	Problème linéaire . . . . .	225
28.2.2	Problème non linéaire . . . . .	227
28.2.3	Algorithme de résolution du problème de Stokes . . . . .	228
<b>29</b>	<b>Equation de la chaleur entre deux métaux</b>	<b>231</b>
29.1	Enoncé . . . . .	231
29.1.1	Partie I : éléments finis . . . . .	231
29.1.2	Partie II : optimisation continue . . . . .	233
29.2	Correction . . . . .	237
29.2.1	Partie I : éléments finis . . . . .	237
29.2.2	Partie II : optimisation continue . . . . .	240

<b>30 Loi de Darcy et loi de Stokes</b>	<b>249</b>
30.1 Enoncé . . . . .	249
30.1.1 Réécriture du problème . . . . .	249
30.1.2 Problème de minimisation . . . . .	250
30.1.3 Ecriture en dimension finie . . . . .	251
30.2 Correction . . . . .	251
30.2.1 Réécriture du problème . . . . .	251
30.2.2 Problème de minimisation . . . . .	252
30.2.3 Ecriture en dimension finie . . . . .	253
<b>31 Equation d'advection diffusion</b>	<b>255</b>
31.1 Enoncé . . . . .	255
31.1.1 Elements finis . . . . .	255
31.1.2 Optimisation . . . . .	258
31.2 Correction . . . . .	263
31.2.1 Elements finis . . . . .	263
31.2.2 Optimisation . . . . .	267
<b>32 Poincaré-Electrostatique</b>	<b>275</b>
32.1 Enoncé . . . . .	275
32.1.1 Inégalité de Poincaré optimale pour le segment $[0, 1]$ . . . . .	275
32.1.2 Modélisation énergétique d'un problème d'électrostatique . . . . .	276
32.2 Correction . . . . .	276
32.2.1 Inégalité de Poincaré optimale . . . . .	276
32.2.2 Modélisation d'un problème d'électrostatique . . . . .	278
<b>33 Equation de l'influx nerveux</b>	<b>279</b>
33.1 Enoncé . . . . .	279
33.1.1 Problème variationnel sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	280
33.1.2 Problème de propagation en dimension 1 . . . . .	280
33.1.3 Problème sur le cylindre infini . . . . .	283
33.2 Correction . . . . .	283
33.2.1 Problème variationnel sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	283
33.2.2 Problème de propagation en dim 1 . . . . .	284
33.2.3 Problème sur le cylindre infini . . . . .	288
<b>34 Optique géométrique</b>	<b>291</b>
34.1 Enoncé . . . . .	291
34.1.1 Problème d'optimisation équivalent . . . . .	291
34.1.2 Condition de Dirichlet . . . . .	293
34.1.3 Non existence de $J_0$ . . . . .	294

34.2	Correction . . . . .	294
34.2.1	Problème équivalent . . . . .	294
34.2.2	Condition de Dirichlet . . . . .	297
34.2.3	Non existence de $J_0$ . . . . .	299
<b>35</b>	<b>Problème de Stokes (II)</b>	<b>301</b>
35.1	Enoncé . . . . .	301
35.1.1	Du non linéaire au linéaire . . . . .	301
35.1.2	Formulation du problème de Stokes . . . . .	302
35.2	Correction . . . . .	305
35.2.1	Du non linéaire au linéaire . . . . .	305
35.2.2	Formulation du problème de Stokes . . . . .	308
<b>36</b>	<b>Déformation d'un solide</b>	<b>311</b>
36.1	Enoncé . . . . .	311
36.1.1	Energie des grandes déformations . . . . .	311
36.1.2	Calcul des petites déformations . . . . .	312
36.1.3	Approximation du solide $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ par quatre points de base . . . . .	313
36.2	Correction . . . . .	313
36.2.1	Energie des grandes déformations . . . . .	313
36.2.2	Calcul des petites déformations . . . . .	315
36.2.3	Approximation du solide $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ par quatre points de base . . . . .	317
<b>37</b>	<b>Inclusions de diélectrique</b>	<b>319</b>
37.1	Enoncé . . . . .	319
37.1.1	Modélisation du problème et mise en équation . . . . .	319
37.1.2	Etude dans le cas général . . . . .	320
37.1.3	Etude théorique en dimension 1 . . . . .	321
37.1.4	Discrétisation du problème (dimension finie) . . . . .	322
37.1.5	Résolution algorithmique . . . . .	323
37.2	Correction . . . . .	323
37.2.1	Modélisation . . . . .	323
37.2.2	Cas général . . . . .	324
37.2.3	Dimension 1 . . . . .	326
37.2.4	Discrétisation (dimension finie) . . . . .	328
37.2.5	Algorithmique . . . . .	329

---

<b>38 Opérateur de Schrödinger non linéaire</b>	<b>331</b>
38.1 Enoncé . . . . .	331
38.1.1 Le cas $G = 1$ . . . . .	331
38.1.2 Partie B . . . . .	332
38.2 Correction . . . . .	334
38.2.1 Le cas $G = 1$ . . . . .	334
38.2.2 Partie B . . . . .	338
<b>39 Approximations successives EDP</b>	<b>341</b>
39.1 Enoncé . . . . .	341
39.1.1 Questions préliminaires . . . . .	341
39.1.2 Inégalités . . . . .	342
39.1.3 Estimations . . . . .	343
39.1.4 Méthode de Newton . . . . .	344
39.2 Correction . . . . .	344
39.2.1 Questions préliminaires . . . . .	344
39.2.2 Inégalités . . . . .	346
39.2.3 Estimations . . . . .	347
39.2.4 Méthode de Newton . . . . .	348
<b>40 Problèmes courts (non corrigés)</b>	<b>351</b>
40.1 Minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte . . . . .	351
40.2 Différentiabilité au sens de Fréchet et de Gâteaux . . . . .	352
40.3 Calcul fonctionnel et application . . . . .	352
40.4 Calcul fonctionnel pour l'optimisation . . . . .	353
40.5 Dimension 2 sous contraintes . . . . .	353
40.6 Exercices autres . . . . .	354
40.7 Une fonctionnelle simple . . . . .	355
40.7.1 Calcul fonctionnel . . . . .	355
40.7.2 Résolution numérique . . . . .	355
40.8 Exercice . . . . .	356