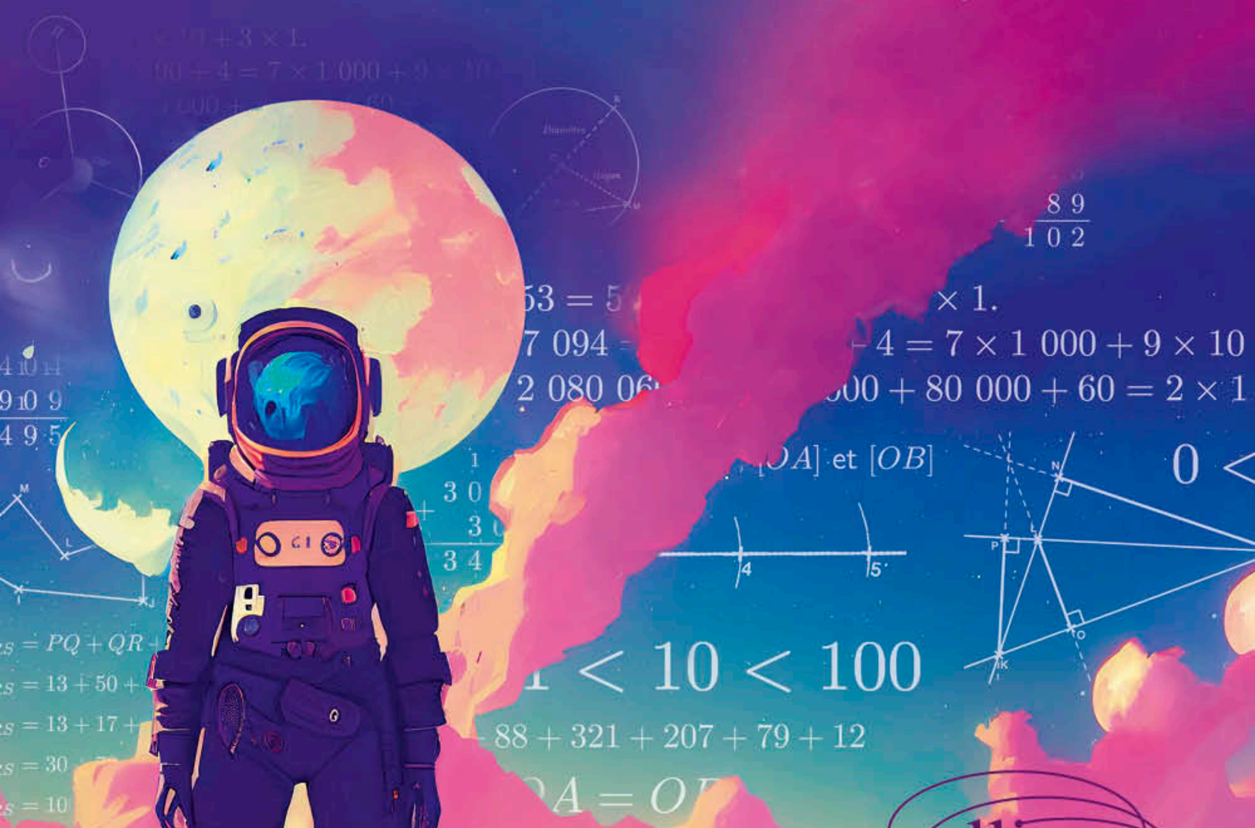
S'aventurer au pays des **Mathématiques**

6e

Avec un guide
et 40 problèmes originaux à explorer



Matthieu Chiaramonte

ellipses

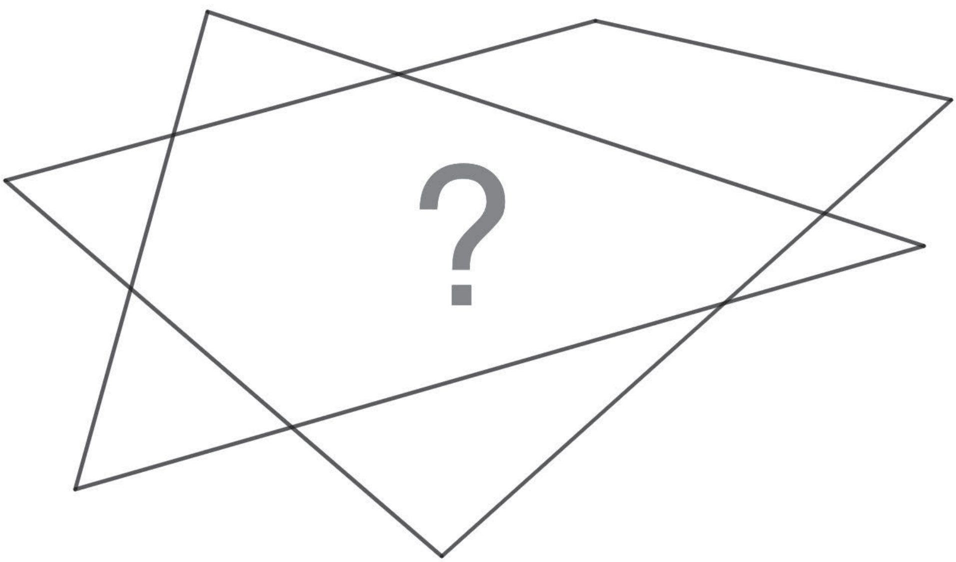
AVENTURE

I

Une histoire de périmètre

« Vous prenez une question puis vous partez faire un tour à pied et vous y réfléchissez de tête : "Comment diable est-ce que je pourrais démontrer ça ?" »

Alain Connes, mathématicien (né en 1947)



1. Sur une feuille blanche, choisir une unité de longueur puis tracer une demi-droite graduée.

2. Existe-t-il un triangle et un quadrilatère, chacun de longueurs de côtés entières toutes différentes, qui ont le même périmètre ? Justifier.

3. Si oui, en prenant pour unité de longueur celle choisie à la première question, tracer à la règle et au compas (sans mesurer donc) votre solution sur la feuille blanche.

► *Correction page 30.*

À maîtriser à la fin de cette aventure

- Comparer deux nombres entiers.
- Calculer la somme et la différence de deux nombres entiers.
- Calculer une somme d'entiers en rédigeant les calculs en ligne.
- Tracer et nommer une droite, un segment, une demi-droite.
- Graduer une demi-droite.
- Connaître la définition d'un polygone.
- Connaître la définition du périmètre d'une figure.
- Calculer le périmètre d'un polygone.
- Connaître la définition d'un cercle.
- Tracer et nommer un triangle donné à la règle et au compas.
- Tracer et nommer un quadrilatère donné à la règle et au compas.

Feuille de route

- ☐ **. . . / . . . Chercher** le problème d'introduction de l'Aventure I.
- ☐ **. . . / . . . Lire** la partie A. *a) Le système décimal* puis **chercher** l'exercice I.1 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie A. *b) Comparaison de nombres entiers* puis **chercher** l'exercice I.2 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie A. *c) Addition de nombres entiers* puis **chercher** l'exercice I.3 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie A. *d) Soustraction de deux nombres entiers* puis **chercher** l'exercice I.4 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . .** ***Réviser toute la partie*** *A. Les nombres entiers* ***puis se tester avec l'interrogation I.1.***
- ☐ **. . . / . . . Lire** la partie B. *a) Les objets géométriques élémentaires* puis **chercher** l'exercice I.5 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie B. *b) Les polygones* et **apprendre** par cœur la définition *I.4* puis **chercher** l'exercice I.6 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie B. *c) La notion de longueur* et **apprendre** par cœur la définition *I.6* puis **chercher** l'exercice I.7 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie B. *d) La demi-droite graduée* puis **chercher** l'exercice I.8 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Recopier** la partie B. *e) Le cercle* et **apprendre** par cœur la définition *I.9* puis **chercher** l'exercice I.9 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Lire** la partie B. *f) Tracer à la règle et au compas* puis **chercher** l'exercice I.9 puis **comparer** avec la correction.
- ☐ **. . . / . . .** ***Réviser toute la partie*** *B. La géométrie plane* ***puis se tester avec l'interrogation I.2.***
- ☐ **. . . / . . . Chercher à nouveau** le problème de l'Aventure I puis **comparer** avec sa première recherche puis avec la correction.
- ☐ **. . . / . . . Chercher** les trois autres problèmes à explorer à la fin de l'Aventure I puis **comparer** avec la correction.

A. Les nombres entiers

Les nombres entiers sont souvent utilisés pour compter/dénombrer des quantités (par exemple des objets ou des personnes).
Il existe plusieurs systèmes d'écriture pour écrire ces nombres entiers. Nous utilisons le système décimal qui est basé sur le nombre 10 (ce qui permet de facilement compter avec ses doigts).

a) Le système décimal

Dans le système décimal, on écrit les **nombres** à l'aide de **10 chiffres** :

$$0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3 \; ; 4 \; ; 5 \; ; 6 \; ; 7 \; ; 8 \text{ et } 9.$$

Dans un nombre, chaque **rang** correspond à une *puissance de 10* (c'est-à-dire 1 ; 10 ; 100 ; 1 000 ; etc.). Ainsi, chaque chiffre nous indique le nombre de *puissance de 10* qui correspond à son rang.

Exemple : Considérons le nombre 50 749 :

milliards			millions			milliers			unités		
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités
							5	**0**	**7**	**4**	**9**

Nous pouvons alors écrire sa décomposition par rang :

$$50\ 749 = 50\ 000 + 700 + 40 + 9 = \mathbf{5} \times 10\ 000 + \mathbf{0} \times 1\ 000 + \mathbf{7} \times 100 + \mathbf{4} \times 10 + \mathbf{9} \times 1$$

Exercice I.1.
1. Écrire la décomposition par rang des nombres entiers suivants :
a) 53 **b)** 7 094 **c)** 2 080 060

► *Correction page 25.*

ATTENTION :

- *Les chiffres permettent d'écrire les nombres de la même manière que les lettres de l'alphabet permettent d'écrire les mots.* 7 *est un nombre à un seul chiffre (c'est donc à la fois un chiffre et un nombre).* 23 *est un nombre à deux chiffres.*
- *Dans le nombre* 50 749 *ci-dessus, le chiffre des unités de milliers est* 0 *mais le nombre d'unités de milliers est* 50 *(c'est-à-dire qu'il y a au maximum* 50 *unités de milliers dans ce nombre).*

b) Comparaison de nombres entiers

On utilise directement cette écriture décimale (qui est une écriture de position car la position de chaque chiffre a une importance) pour comparer deux nombres entiers :

Propriété I.1.
Comparer deux nombres signifie trouver lequel est le plus grand.
Pour cela, on part du rang le plus grand et on regarde lequel de ces deux nombres a le plus grand chiffre à ce rang :

- celui qui a le plus grand chiffre à ce rang est le plus grand nombre ;
- si les deux chiffres sont égaux, on passe au rang suivant. Et ainsi de suite.

Démonstration : *À chercher !*

► *Correction page 25.*

Exemple : Comparer les nombres $704\ 000$ et $703\ 879$:
En partant du rang le plus grand, les deux nombres ont les mêmes chiffres jusqu'au rang des unités de milliers où $4 > 3$ donc $704\ 000 > 703\ 879$.
Le symbole $>$ signifie "plus grand que" et $<$ signifie "plus petit que".

Exercice I.2.
Comparer les nombres 83 057 et 83 105. **Justifier.**

► *Correction page 25.*

c) Addition de nombres entiers

Une **addition** est une opération qui permet de **calculer la somme** de deux ou de plusieurs nombres. Ces nombres sont appelés les **termes** de la somme.

Exemple : Calculer la somme $64 + 189$.
$64 + 189$ est la somme de 64 et de 189, qui sont les termes de cette somme.
Pour calculer cette somme, on utilise l'opération de l'addition :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 6\ 4 \\ +\ 1\ 8\ 9 \\ \hline 2\ 5\ 3 \end{array}$$

On additionne rang par rang en partant de celui des unités.
On obtient $4 + 9 = 13$ unités. Or $13 = 10 + 3$: on a une dizaine en trop. On place donc le chiffre 3 au rang des unités et on met le nombre 1 en retenue au rang des dizaines. Et ainsi de suite.

Conclusion : $64 + 189 = 253$.

Propriété I.2.
Dans une **somme**, on peut modifier l'ordre des termes et les regrouper (pour les additionner séparément) sans que cela ne change sa valeur.

Démonstration : *Admise.*

Exemple : Calculer la somme $A = 1125 + 71 + 875 + 29$.

$A = 1125 + 71 + 875 + 29$	
$A = 1125 + 875 + 71 + 29$	On a modifié l'ordre des termes pour regrouper ceux qui s'additionnent plus facilement mais la valeur de cette somme est toujours égale à A.
$A = 2000 + 100$	On a additionné séparément les regroupements mais la valeur de cette somme est toujours égale à A.
$A = 2100$	

La somme A est égale à 2 100.

Exercice I.3.
Calculer la somme suivante :

$$N = 703 + 88 + 321 + 207 + 79 + 12$$

► *Correction page 25.*

d) Soustraction de deux nombres entiers

Une **soustraction** est une opération qui permet de **calculer la différence** entre deux nombres. Ces deux nombres sont appelés les **termes** de la différence.

Exemple : Calculer la différence $151 - 83$.
$151 - 83$ est la différence entre 151 et 83, qui sont les termes de cette différence.
Pour calculer cette différence, on utilise l'opération de soustraction :

$$\begin{array}{r@{\;}c@{\;}c@{\;}c} & 1 & {}_{1}5 & {}_{1}1 \\ - & {}_{1}0 & {}_{1}8 & 3 \\ \hline & 0 & 6 & 8 \end{array}$$

On soustrait rang par rang en partant de celui des unités. Au rang des unités, 1 est plus petit que 3. Pour pouvoir effectuer la soustraction on ajoute 10 unités au premier terme : on a donc maintenant $1 + 10 = 11$ unités. Mais il nous faut aussi ajouter 10 unités au deuxième terme car sinon ce ne serait plus la même différence à calculer ! Or 10 unités est égal à 1 dizaine, on ajoute alors 1 dizaine au deuxième terme, qui a donc maintenant $8 + 1 = 9$ au rang des dizaines. Et ainsi de suite.

Conclusion : $151 - 83 = 68$.

ATTENTION :

- *On ne peut pas modifier l'ordre des termes d'une différence,* ***le premier terme doit être plus grand que le deuxième !***
- *Les retenues n'ont pas toutes le même sens : celles au premier terme signifient « +10 » alors que celles au deuxième signifient « +1 ».*

Exercice I.4.
Calculer les sommes et différences suivantes en posant la opération :
a) $13 + 89$ **b)** $74 - 29$ **c)** $3605 + 30506$ **d)** $4404 - 909$

► *Correction page 26.*

B. La géométrie plane

En mathématiques, un plan est un modèle idéal d'un plan de notre monde physique : on peut l'imaginer comme une feuille infinie, sans bord ni épaisseur.
La géométrie plane est donc la géométrie qui étudie les objets géométriques dans le plan, c'est-à-dire ceux que l'on peut dessiner sur une feuille.

a) Les objets géométriques élémentaires

ATTENTION : *Dès qu'on trace un objet géométrique pour le visualiser, ce n'est qu'une représentation (imparfaite donc) de cet objet.*

Le point

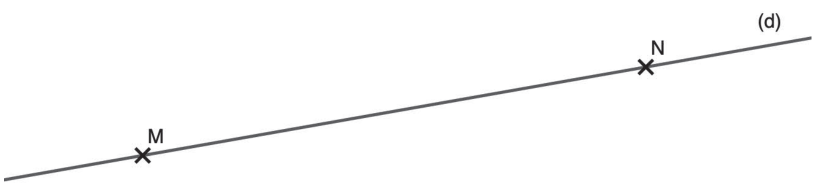
Un **point** de l'espace est un **lieu** qui n'a **ni longueur ni épaisseur** : on peut l'imaginer comme étant la pointe du compas.

Exemple : Un point se représente généralement par une croix (qui représente en fait l'intersection de deux droites !) et se nomme par une lettre capitale.
Voici donc un point A :

La droite

Si on prend deux points de l'espace, on peut tracer autant de lignes que l'on veut qui passent par ces deux points. Une **droite** est une ligne particulière, c'est celle que l'on peut tracer à l'aide d'une **règle** : on peut l'imaginer comme une corde tendue, infinie et sans épaisseur. Cette droite est **unique**.

Exemple : Une droite se note avec des **parenthèses** : la droite (d) passe par les points M et N, elle peut donc également se noter (MN).



Le segment

Définition I.3.
Un **segment** est une **portion de droite** délimitée par deux points.
On appelle ces deux points les **extrémités** du segment.

Exemple : Un segment se note avec des **crochets** : le segment ci-dessous a pour extrémités les points R et S, il se note donc $[\boldsymbol{RS}]$.

ATTENTION : *En géométrie* ***les notations sont très importantes*** *: il n'est pas nécessaire de voir l'objet pour en parler !*
Dans l'exemple ci-dessus, si on écrit (RS) avec des parenthèses on parle alors de la droite passant par les points R et S : elle n'est pas tracée mais on peut l'imaginer et donc réfléchir et travailler dessus.

Exercice I.5.
1. Tracer quatre points A ; B ; C et D non alignés (c'est-à-dire qu'il ne faut pas que trois de ces points soient sur une même droite).
2. Tracer la droite passant par les points B et D.
3. Tracer le segment d'extrémités A et C.
4. Tracer les objets géométriques suivants : **a)** (CB) **b)** $[DC]$ **c)** (DA)

▶ *Correction page 26.*

b) Les polygones

Définition I.4.

- Un **polygone** est une figure fermée composée uniquement de segments consécutifs. Ces segments sont appelés les **côtés** du polygone et les extrémités de ces côtés sont appelés les **sommets** du polygone.
- Un **triangle** est un polygône qui possède trois côtés.
- Un **quadrilatère** est un polygone qui possède quatre côtés.