

2^e
édition

Thierry Gallouët
Raphaèle Herbin

Mesure, intégration, probabilités

Cours avec plus de 300 exercices corrigés



ellipses

Table des matières

1	Motivation et objectifs	9
1.1	Intégrale des fonctions continues	9
1.2	Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues	12
1.3	Les probabilités	15
1.4	Objectifs	15
1.5	Structure du cours	16
1.6	Exercices	17
2	Tribus et mesures	39
2.1	Introduction	39
2.2	Tribu ou σ -algèbre	40
2.3	Mesure, probabilité	45
2.4	Mesure signée	52
2.5	La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens	56
2.6	Indépendance et probabilité conditionnelle	67
2.7	Exercices	73
3	Fonctions mesurables, variables aléatoires	115
3.1	Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$	115
3.2	Fonctions étagées	117
3.3	Fonctions mesurables et variables aléatoires	119
3.4	Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes	126
3.5	Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité	130
3.6	Exercices	133
4	Fonctions intégrables	169
4.1	Intégrale d'une fonction étagée positive	170
4.2	Intégrale d'une fonction mesurable positive	172
4.3	Convergence monotone et lemme de Fatou	177
4.4	Mesures et probabilités de densité	180

4.5	L'espace \mathcal{L}^1 des fonctions intégrables	181
4.6	L'espace L^1	185
4.7	Théorèmes de convergence dans L^1	189
4.8	Continuité et dérivabilité sous le signe intégrale	195
4.9	Espérance et moments des variables aléatoires	196
4.10	Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$	201
4.11	Exercices	204
5	Intégrale sur les boréliens de \mathbb{R}	263
5.1	Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues .	263
5.2	Mesures abstraites et mesures de Radon	265
5.3	Changement de variable, densité et continuité	272
5.4	Intégrales impropres des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	276
5.5	Exercices	276
6	Les espaces L^p	297
6.1	Définitions et premières propriétés	297
6.2	Analyse hilbertienne et espace L^2	311
6.3	Dualité dans les espaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$	334
6.4	Convergence faible, faible-*, étroite, en loi	343
6.5	Exercices	357
7	Produits d'espaces mesurés	461
7.1	Motivation	461
7.2	Mesure produit	462
7.3	Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini	467
7.4	Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de \mathbb{R}^N	472
7.5	Convolution	475
7.6	Formules de changement de variable	481
7.7	Exercices	483
8	Densité, séparabilité et compacité	527
8.1	Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$	527
8.2	Séparabilité de $L^p(\Omega)$	532
8.3	Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$	532
8.4	Compacité faible-*	534
8.5	Exercices	537
9	Vecteurs aléatoires	551
9.1	Définition, propriétés élémentaires	551
9.2	Indépendance	557

9.3	Vecteurs gaussiens	561
9.4	Exercices	564
10	Transformation de Fourier	583
10.1	Introduction et notations	583
10.2	Transformation de Fourier dans L^1	584
10.3	Transformée de Fourier d'une mesure signée	589
10.4	Transformation de Fourier dans L^2	591
10.5	Résolution d'une E.D.O ou d'une E.D.P	594
10.6	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire	595
10.7	Exercices	602
11	Espérance conditionnelle et martingales	629
11.1	Espérance conditionnelle	629
11.2	Martingales	638
11.3	Exercices	641
	Références	675
	Index	677