Daniel Li

L3
Master

Notions fondamentales d'Analyse réelle et complexe

Espaces de Hardy et interpolation

Avec exercices corrigés

ellipses

Chapitre I

FONCTIONS HOLOMORPHES

I.1. Introduction

Il ne s'agit pas ici de faire tout un cours de Licence sur les fonctions holomorphes, mais seulement d'en donner le « minimum vital » (déjà assez conséquent !), c'est-à-dire d'en rappeler les propriétés essentielles.

Pour de plus amples développements, on pourra, par exemple, consulter les excellents livres suivants :

- Éric Amar et Étienne Matheron : *Analyse complexe*, Cassini (2020).
- Hervé Queffélec et Martine Queffélec : *Analyse complexe et applications*, Calvage et Mounet, Mathématiques en devenir (2017).

Signalons que le premier, peut-être d'un abord plus délicat, utilisant les formes différentielles, est adapté pour introduire à l'étude des fonctions holomorphes de plusieurs variables.

I.2. Fonctions holomorphes

I.2.1. Définition et propriétés immédiates

Définition I.2.1 (Briot et Bouquet [1875]). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$; on dit que la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est* holomorphe*, ou* $\mathbb{C}$-dérivable*, en $z_0 \in \Omega$ si*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \textit{existe.}$$

On note alors cette limite $f'(z_0)$ et on dit que c'est la dérivée de f en z_0.

On dit que f est holomorphe **dans** Ω *si f est holomorphe en tout point $z_0 \in \Omega$.*

On notera $\mathscr{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω.

Remarque. Si f est holomorphe en z_0, elle est clairement *continue* en z_0.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Proposition I.2.2.
1) *Si f et g sont holomorphes dans Ω et $a \in \mathbb{C}$, alors $f+g$, $a\,f$, et $f\,g$ sont holomorphes dans Ω et*

$$(f+g)' = f' + g' \,; \quad (a\,f)' = a\,f' \,; \quad (f\,g)' = f'\,g + f\,g' \,.$$

2) *Si f et g sont holomorphes dans Ω et si g ne s'annule pas dans Ω, alors f/g est holomorphe dans Ω et*

$$(f/g)' = (f'\,g - f\,g')\,/g^2 \,.$$

3) *Si f est holomorphe dans Ω) et g est holomorphe dans un ouvert Ω' contenant $f(\Omega)$, alors $g \circ f$ est holomorphe dans Ω et*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\,f' \,.$$

Conséquence. Tout polynôme est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
Toute fraction rationnelle est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des pôles de la fraction rationnelle. En particulier, la fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.

Contre-exemple. La fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

Définition I.2.3. *Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier, on dit que c'est une* fonction entière.

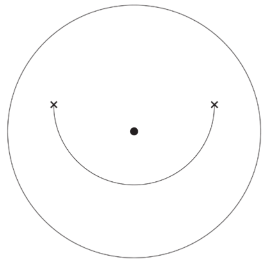
Tout polynôme est donc une fonction entière. L'exponentielle est aussi une fonction entière (on reviendra là-dessus).

Commentaires. 1) Les fonctions holomorphes ont des *propriétés très différentes* des fonctions dérivables d'une variable réelle, et aussi des fonctions différentiables de deux variables réelles. Cela est dû au fait qu'elles sont automatiquement *analytiques*. Mais même pour les fonctions analytiques, le fait que la variable soit complexe, au lieu d'être seulement réelle, apporte un supplément (voir, par exemple, le *principe du maximum*).

2) Qu'est-ce qui différencie la variable complexe de la variable réelle ? Citons deux faits.

a) Si on retire un point à un intervalle, il n'est plus possible de passer d'un côté à l'autre, alors que si l'on retire un point à un disque (par exemple ; plus généralement à un ouvert connexe), on peut toujours aller d'un point à un autre. En particulier, on peut **tourner autour** de ce point. C'est un *avantage*.

b) Sur un intervalle, il n'y a qu'une façon d'aller d'un point à un autre, alors que dans un disque (ou un ouvert connexe), il y en a une infinité. C'est un *inconvénient*.



3) Il y a deux façons de présenter les fonctions dérivables d'une variable complexe :

a) en tant que *fonctions analytiques* ; c'est la *théorie de Weierstrass* ;

b) en tant que fonctions holomorphes, en intégrant sur les chemins ; c'est la *théorie de Cauchy*.

Le fait fondamental est que ces deux façons de voir **coïncident**, et qu'il sera bénéfique de se servir tantôt de l'une, tantôt de l'autre.

I.2.2. Conditions de Cauchy-Riemann

En tant qu'ensemble, $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto z = x + iy \in \mathbb{C}$. Une fonction d'une variable complexe est donc aussi une fonction de deux variables réelles. Plus précisément, si Ω est un ouvert de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ et si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, notons

$$P(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)] \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]\,,$$

de sorte que

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)\,.$$

Quel lien y a-t-il alors entre l'holomorphie de f et la différentiabilité de P et Q ? Nous allons voir que l'holomorphie de f est *plus forte* que la différentiabilité de P et Q.

Proposition I.2.4. *La fonction $f = P + i\,Q$ est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*

a) *P et Q sont différentiables en (x_0, y_0),* **et**

b) *on a les* conditions de Cauchy-Riemann *:*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}\,.$$

On a alors

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}\,.$$

Preuve. La fonction f est holomorphe en z_0, et de dérivée $f'(z_0) = A + iB$, si et seulement si il existe $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ telle que

$$f(z) - f(z_0) = (A + iB)(z - z_0) + |z - z_0|\, \varepsilon(z - z_0)\,,$$

ce qui équivaut, en posant $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, à

$$\begin{cases} P(x, y) - P(x_0, y_0) = A(x - x_0) - B(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| \operatorname{Re}[\varepsilon(z - z_0)] \\ Q(x, y) - Q(x_0, y_0) = B(x - x_0) + A(y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\| \operatorname{Im}[\varepsilon(z - z_0)]\,, \end{cases}$$

d'où le résultat. □

Lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}$, l'intérêt des intervalles est que ce sont les parties *connexes* de $\mathbb{R}$. Les parties connexes de $\mathbb{C}$ auront un rôle important.

Définition I.2.5. *On appelle* domaine *de* $\mathbb{C}$ *toute partie* ouverte *et* connexe *de* $\mathbb{C}$.

On obtient les conséquences suivantes des conditions de Cauchy-Riemann.

Corollaire I.2.6. *Si f est holomorphe dans un* domaine *Ω, alors f est constante dans Ω si et seulement si $f' = 0$ dans Ω.*

En effet, si $f' = 0$, alors les différentielles de P et Q sont nulles.

Si Ω est seulement un ouvert de $\mathbb{C}$, alors la condition $f' = 0$ sur Ω entraîne que f est constante sur chaque *composante connexe* de Ω.

Corollaire I.2.7. *Si Ω est un domaine et si f est holomorphe dans Ω et ne prend que des valeurs réelles (i.e. $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$), alors f est constante dans Ω.*

Preuve. On a $Q = 0$; donc les conditions de Cauchy-Riemann entraîne que les dérivées partielles de P sont nulles, de sorte que $f' = 0$. □

De même, si f ne prend que des valeurs imaginaires pures, alors f est constante. En fait, si la fonction holomorphe f n'est constante dans aucune composante connexe de Ω, on verra que $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

I.2.3. Fonctions analytiques

En dehors des polynômes et des fractions rationnelles, une classe de fonction holomorphes est fournie par les fonctions analytiques. En fait, nous verrons qu'il n'y en pas pas d'autres.

Commençons par quelques rappels sur les séries entières.

Une série entière est une série de fonctions dont le terme général d'ordre n est un monôme $a_n z^n$ de degré n.

Le résultat fondamental, bien qu'élémentaire, est le suivant.

Théorème I.2.8 (Lemme d'Abel). *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$, non nul, *tel que la* suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ *soit bornée, alors :*

a) pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge* absolument *;*

b) pour tout $r < |z_0|$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge* normalement *pour* $|z| \leqslant r$.

Preuve. Il suffit d'écrire :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant |a_n z_0^n| \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n,$$

et ensuite de remarquer que, puisque $r/|z_0| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}(r/|z_0|)^n$ converge. □

Le nombre

$$R = \sup\{r \geqslant 0\,;\ \text{la suite } (|a_n|\, r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit majorée}\}$$

$(0 \leqslant R \leqslant \infty)$ est appelé le *rayon de convergence* de la série entière.

Si $R = 0$, la série entière ne converge que pour $z = 0$; ce n'est pas intéressant.

Notation. Pour $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}$, on note $\boxed{D\,(a,r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-a| < r\}}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r.

Pour $r = \infty$, on note $D\,(a,\infty) = \mathbb{C}$.

Le lemme d'Abel se précise ainsi.

Théorème I.2.9. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière, et* R *son rayon de convergence, avec* $R > 0$. *Alors :*

a) la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge* absolument *pour tout* $z \in D\,(0,R)$ *;*

b) pour tout $r < R$, *la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge* normalement *(donc uniformément) sur* $\overline{D\,(0,r)}$ *; si* $R = \infty$, *elle converge donc normalement sur toute partie compacte de* $\mathbb{C}$ *;*

c) si $|z| > R$, *la série série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *diverge.*

Preuve. *a*) On choisit r tel que $|z| < r < R$; alors $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, et on utilise le Lemme d'Abel.

b) On choisit z_0 tel que $r < |z_0| < R$.

c) Parce que la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée. □

Il en résulte que

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0\,;\ \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ converge}\right\}.$$

Si $R > 0$, le disque ouvert $D(0, R)$ s'appelle le *disque de convergence* de la série entière.

Il résulte de la convergence normale sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)} \subseteq D(0,R)$ que l'on a la continuité de la somme.

Proposition I.2.10. *La somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence.*

Remarque. Pour $|z| = R$, tous les cas de figure sont possibles. Par exemple, les trois séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n^2$ ont $R = 1$ pour rayon de convergence ; mais $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| = 1$; $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n^2$ converge pour tout z tel que $|z| = 1$; $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n$ diverge pour $z = 1$, mais converge pour tout $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$, par un théorème d'Abel que nous ne rappellerons pas ici.

Le calcul du rayon de convergence se fait la plupart du temps en utilisant l'un des deux critères suivants, très simples à montrer, issus, respectivement, des règles de d'Alembert et de Cauchy.

Proposition I.2.11. 1) *Si $a_n \neq 0$ pour n assez grand et si $|a_{n+1}|/|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/L$.*

2) *Si $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in [0, +\infty]$, alors $R = 1/L$.*

En fait, on a une formule générale (*formule d'Hadamard*), dont la preuve n'est pas plus compliquée (voir Exercice 1) :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \cdot$$

Elle est utile si, par exemple, la série est lacunaire (c'est-à-dire que a_n s'annule souvent), comme $\sum_{k\geqslant 0} z^{3^k}$, où $a_{3^k} = 1$ et $a_n = 0$ si $n \neq 3^k$.

Définition I.2.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$; on dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* analytique *dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe un disque $D(z_0, r_{z_0}) \subseteq \Omega$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0, r_{z_0})$.

On dit que f est *développable en série entière au voisinage de z_0*, ou *autour de z_0*. Si f est analytique dans $\mathbb{C}$, on dit que c'est une *fonction entière.*

Il faut noter que les *coefficients a_n dépendent* de z_0.

Exemple. $f(z) = 1/z$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En effet, si on choisit $z_0 \neq 0$, et $r_0 = |z_0|$, on a, pour $|z - z_0| < |z_0|$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{z - z_0}{z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \,. \end{aligned}$$

Théorème I.2.13. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la somme d'une série entière, alors f est analytique dans son disque de convergence.*

Il en résulte que la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est infini est une fonction entière.

Preuve. Il s'agit de voir que f est développable en série entière au voisinage de tout $z_0 \in D\,(0, R)$, et pas seulement au voisinage de 0.

On pose $r_0 = R - |z_0|$. Pour $|z - z_0| < r_0$, on a, en posant $z = z_0 + u$:

$$f(z_0 + u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z_0^{n-k} u^k \right).$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k |a_n|\, |z_0|^{n-k} |u|^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \,(|z_0| + |u|)^n < +\infty$$

car $|z_0| + |u| < |z_0| + r_0 = R$, on peut changer l'ordre des termes, et l'on obtient :

$$f(z_0 + u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k \, a_n z_0^{n-k} \right) u^k \qquad \square$$

Remarque. Le rayon de convergence peut être $> r_0 = R - |z_0|$. Par exemple, pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1 - z)$, on a $R = 1$, mais pour tout $z_0 \neq 1$, on a, puisque

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{1 - z_0}},$$

un rayon de convergence égal à $|1 - z_0|$, qui peut être $> 1 > r_0 = 1 - |z_0|$ (si $\mathrm{Re}\, z_0 < 0$ par exemple).

Proposition I.2.14. *Toute fonction analytique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω.*

Elle est même indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans Ω.

Preuve. Posons $g(w) = f(z_0 + w)$. On a $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ pour $|w| < r_{z_0}$. Pour $|w + u| < r_{z_0}$, on a aussi

$$g(w+u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w+u)^n ,$$

d'où

$$\frac{g(w+u) - g(w)}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(w+u)^n - w^n}{u} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (w+u)^k w^{n-1-k} \right) . \quad (*)$$

Pour chaque $r > 0$ tel que $|w| \leqslant r < r_{z_0}$, il y a convergence normale pour $|w+u| \leqslant r$ car

$$\left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} (w+u)^k w^{n-1-k} \right| \leqslant |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |w+u|^k |w|^{n-1-k} \leqslant |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = n\,|a_n|\, r^{n-1}$$

et $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\, r^{n-1} < +\infty$ car $r < r_{z_0}$. Donc la somme de la série au membre de droite de $(*)$ est continue, et l'on obtient :

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(w+u) - g(w)}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, w^{n-1} .$$

Cela signifie que f est dérivable dans $D\,(z_0, r_{z_0})$ et que

$$f'(z) = g'(z - z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1} .$$

En particulier, on a $f'(z_0) = a_1$.

Comme f' est elle-même la somme d'une série entière dans $D\,(z_0, r_{z_0})$, on peut itérer le raisonnement, et l'on obtient, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f est n fois $\mathbb{C}$-dérivable dans $D\,(z_0, r_{z_0})$ et que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. □

Remarque. Il résulte de la preuve que le développement en série entière est **unique**.

I.2.4. La fonction exponentielle

Nous allons voir comment les propriétés de la fonction exponentielle permettent de définir correctement les fonctions trigonométriques, ainsi que l'argument d'un nombre complexe.

Définition I.2.15. *La* fonction exponentielle *est définie, pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *par*

$$\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} .$$