

Daniel Li

L3
Master

Notions fondamentales d'Analyse réelle et complexe

Espaces de Hardy et interpolation
Avec exercices corrigés



Table des matières

I. Fonctions holomorphes	1
I.1. Introduction	1
I.2. Fonctions holomorphes	1
I.2.1. Définition et propriétés immédiates	1
I.2.2. Conditions de Cauchy-Riemann	3
I.2.3. Fonctions analytiques	4
I.2.4. La fonction exponentielle	8
I.2.5. Le problème du logarithme	12
I.3. Théorie de Cauchy	14
I.3.1. Intégration sur les chemins	14
I.3.2. Indice d'un point par rapport à un lacet	16
I.3.3. Le Théorème de Cauchy local	19
I.4. Propriétés fondamentales	26
I.4.1. Principe des zéros isolés	26
I.4.2. Principe du maximum	29
I.5. Simple connexité	34
I.5.1. Théorème de Cauchy global	34
I.5.2. Le Théorème de l'argument et ses conséquences	37
I.5.3. Simple connexité	43
I.5.4. Primitives	44
I.5.5. Logarithmes	46
I.6. Suites et produits infinis de fonctions holomorphes	48
I.6.1. Suites de fonctions holomorphes	48
I.6.2. Familles normales	50
I.6.3. Produits infinis	57
I.6.4. Exemple	60
I.7. Exercices	64
II. Théorème de dérivation de Lebesgue	93
II.1. Introduction	93
II.2. Fonction maximale de Hardy-Littlewood	94
II.3. Théorème de dérivation de Lebesgue	98
II.4. Généralisation	101
II.5. Fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R}	103
II.5.1. Fonctions à variation bornée	103

II.5.2. Intégrale de Riemann-Stieltjes	106
II.5.3. Dérivabilité	111
II.5.4. Intégration des dérivées : fonctions absolument continues	114
II.6. Fonctions lipschitziennes à plusieurs variables	120
II.7. Exercices	122
III. Fonctions harmoniques	129
III.1. Définition et noyau de Poisson	129
III.1.1. Définition	129
III.1.2. Noyau de Poisson	130
III.1.3. Intégrale de Poisson	132
III.2. Propriétés des fonctions harmoniques	137
III.2.1. Propriété de moyenne et principe du maximum	137
III.2.2. Convergence des suites de fonctions harmoniques	140
III.3. Comportement à la frontière des intégrales de Poisson	142
III.3.1. Introduction	142
III.3.2. Comportement ponctuel	143
III.4. Comportement à la frontière des fonctions harmoniques dans \mathbb{D}	152
III.5. Exercices	155
IV. Interpolation (période pré-historique)	163
IV.1. Théorème de Riesz-Thorin	163
IV.2. Théorème de Marcinkiewicz	170
IV.2.1. Le Théorème de Marcinkiewicz et sa preuve	170
IV.2.2. La projection de Riesz	175
IV.3. Exercices	181
V. Espaces de Hardy	183
V.1. Fonctions sous-harmoniques	183
V.1.1. Inégalité de Jensen	183
V.1.2. Fonctions sous-harmoniques	186
V.2. Espaces de Hardy	190
V.3. Zéros des fonctions holomorphes	194
V.3.1. Formule de Jensen	194
V.3.2. Zéros de fonctions de la classe de Nevanlinna	198
V.4. Théorème de factorisation de Riesz	199
V.5. Valeurs au bord des fonctions des espaces de Hardy	203
V.6. Fonctions conjuguées	210
V.7. Sous-espaces invariants	216
V.7.1. Fonctions intérieures et extérieures	216
V.7.2. Le Théorème de Beurling	221
V.7.3. Extension au cas de H^p	223
V.8. Opérateurs de composition	227
V.8.1. Introduction	227
V.8.2. Un peu d'homotopie	233
V.8.3. Preuve du Théorème de Lindelöf	236

V.8.4. Continuité des opérateurs de composition	238
V.8.5. Théorème de Carleson	240
V.8.6. Théorème de Carleson et opérateurs de composition	245
V.8.7. Compacité des opérateurs de composition	247
V.9. Exercices	257
VI. Interpolation (période historique)	271
VI.1. Couples d'interpolation	271
VI.2. Étude plus précise du couple (L^1, L^∞)	273
VI.3. La fonctionnelle K	282
VI.4. Dualité	288
VI.5. Le Théorème de réitération	289
VI.6. Exercices	295
VII. Interpolation (période moderne)	305
VII.1. Interpolation des espaces de Hardy	305
VII.1.1. Reformulation	306
VII.1.2. Preuve du Théorème de P. Jones	310
VII.2. Le Théorème de J. Bourgain	314
VII.2.1. Opérateurs p -sommants	314
VII.2.2. Le Théorème de Grothendieck	323
VII.2.3. Cotype des espaces de Banach	333
VII.2.4. Le Théorème de Jean Bourgain	338
VII.3. Exercices	348
VIII. Corrigés des exercices	355
VIII.1. Exercices du Chapitre I	355
VIII.2. Exercices du Chapitre II	420
VIII.3. Exercices du Chapitre III	443
VIII.4. Exercices du Chapitre IV	459
VIII.5. Exercices du Chapitre V	463
VIII.6. Exercices du Chapitre VI	492
VIII.7. Exercices du Chapitre VII	516
Bibliographie sommaire	531
Index terminologique	533