OPTIMUM

52 semaines pour préparer les mathématiques appliquées

ECG

- Interrogations écrites
- Devoirs surveillés
- Concours blancs

Hédi **Joulak**

ellipses

Semaine 1 **: Interrogation écrite 1**

Raisonnements, contre-exemple, négation

Durée : 1h30

Exercice 1 (13 pts)

Objectifs :
⋆ *Démonstration par récurrence.*
⋆ *Établir une conjecture et la démontrer.*

1. (*3 points*) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$.
2. (*5 points*) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
3. (*5 points*) Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n et la démontrer.

Exercice 2 (3 pts)

Objectifs :
⋆ *Contraire d'une proposition.*

Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. (*1 point*) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. (*1 point*) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
3. (*1 point*) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$

Exercice 3 (4 pts)

Objectifs :
⋆ *Raisonnement par l'absurde.*

(*4 points*) Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_2 = 3$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = 2u_{n+1} - 2$.
Montrer, par l'absurde, que la suite $(u_n)_n$ diverge.

Interrogation écrite 1 : le barème

Exercice 1

1. 1 pour l'initialisation + 2 pour l'hérédité
2. 1 pour l'initialisation + 4 pour l'hérédité
3. 1 pour l'initialisation + 4 pour l'hérédité

Exercice 2

1. 1 pour la négation
2. 1 pour la négation
3. 1 pour la négation

Exercice 3

4 pour le raisonnement par l'absurde

Interrogation écrite 1 : le corrigé

Exercice 1

1. Pour $n = 0$, on a bien $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times x$.
   Supposons la formule vraie à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   On a alors :
   $$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)$$
   par hypothèse de récurrence (et grâce au fait que $1 + x \geq 0$).
   Cela devient alors :
   $$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$
   d'où l'ordre $n + 1$.
2. Pour $n = 1$, on a bien $2^0 \leq 1! \leq 1^1$.
   Supposons la proposition vraie à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   On a alors :
   $$2^n = 2^{n-1} \times 2 \leq 2n!$$
   par hypothèse de récurrence.
   Or, $2 \leq n + 1$ (vu que $n \geq 1$), d'où :
   $$2^n \leq (n + 1)n! = (n + 1)!$$
   Ensuite, on a :
   $$(n + 1)! = (n + 1)n! \leq (n + 1)n^n$$
   par hypothèse de récurrence (et grâce au fait que $n + 1 \geq 0$).
   On a clairement : $n^n \leq (n + 1)^{n+1}$ d'où :
   $$(n + 1)! \leq (n + 1)(n + 1)^n = (n + 1)^{n+1}$$
   d'où l'ordre $n + 1$.
3. On calcule pour cela les premiers termes :
   $$u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 7,\ u_4 = 15,\ u_5 = 31$$
   Là, il faut avoir l'œil et se rendre compte que l'on est proche des puissances de 2 : $2, 4, 8, 16, 32$.
   Ainsi, on peut conjecturer que :
   $$\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n - 1$$

Démontrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a le résultat par l'énoncé.
Supposons la formule vraie à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On a alors :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1$$

par hypothèse de récurrence.
Ceci nous donne donc :

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

d'où l'ordre $n + 1$.

Exercice 2

1. $\exists x \in I, \ f(x) = 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \ f(x) \neq y$
3. $\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in I, \ |f(x)| > M$

Exercice 3

Supposons, par l'absurde, que la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel l.
Alors on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation qui détermine u_n :

$$l^2 = 2l - 2$$

ce qui nous amène à résoudre l'équation $l^2 - 2l + 2 = 0$.
Or, son discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$ donc il n'y a pas de solution.
Dès lors, la suite $(u_n)_n$ diverge.

Semaine 2 : Interrogation écrite 2

Sommes, ensemble et applications

Durée : 30 min

Exercice 1 (14 pts)

Objectifs :
⋆ *Définition de l'injectivité.*
⋆ *Définition de la surjectivité.*

Soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ deux applications.

1. (*3,5 points*) Montrez que : f et g injectives $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injective.
2. (*3,5 points*) Montrez que : f et g surjectives $\Longrightarrow$ $g \circ f$ surjective.
3. (*3,5 points*) Montrez que : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.
4. (*3,5 points*) Montrez que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective.

Exercice 2 (6 pts)

Objectifs :
⋆ *Notion d'union, d'intersection et d'inclusion.*

Soit A et B des parties d'un ensemble E.
Montrer que :

$$A = B \Longleftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

Interrogation écrite 2 : le barème

Exercice 1

1. 1 pour partir de $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ + 1 ,5 pout utiliser l'injectivité de g + 1 pour celle de f
2. 1 pour la définition de g surjective + 1 pour celle de f + 1,5 pour conclure
3. 1,5 pour la définition de $g \circ f$ surjective + 2 pour conclure
4. 1 pour partir de $f(x_1) = f(x_2)$ + 1,5 pour composer par g + 1 pour conclure

Exercice 2

1 pour l'implication évidente + 5 pour l'autre

Interrogation écrite 2 : le corrigé

Exercice 1

1. On suppose que f et g sont injectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   On suppose que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
   Cela s'écrit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$; comme g est injective et que $f(x_1), f(x_2) \in B$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.
   À présent, comme f est injective et que $x_1, x_2 \in A$, on a : $x_1 = x_2$.
   En résumé, $g \circ f$ est bien injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   Comme $g : B \longrightarrow C$ est surjective, on a :
   $$\forall z \in C, \ \exists y \in B, \ z = g(y)$$
   Comme $y \in B$ et que $f : A \longrightarrow B$ est surjective, on a :
   $$\exists x \in A, \ y = f(x)$$
   En résumé, on a montré que :
   $$\forall z \in C, \ \exists x \in A, \ z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
   c'est-à-dire : $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective.
3. On suppose que $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective c'est-à-dire :
   $$\forall y \in C, \ \exists x \in A, \ y = (g \circ f)(x)$$
   Ainsi, on peut écrire que :
   $$\forall y \in C, \ \exists x \in A, \ y = g(f(x))$$
   Or $f(x) \in B$ (vu que $f : A \longrightarrow B$) et en le notant z, on a ainsi :
   $$\forall y \in C, \ \exists z \in B, \ y = g(z)$$
   soit g surjective.
4. Supposons que $g \circ f$ soit surjective et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
   En composant cette dernière égalité par g, on a :
   $$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$
   Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.

Exercice 2

($\Longrightarrow$) Implication évidente car si $A = B$ alors $A \cup B = A \cap B = A$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $A \cup B = A \cap B$ et montrons tout d'abord que $A \subset B$.
Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ et par suite $x \in A \cap B$ vu que $A \cup B = A \cap B$.
Comme $x \in A \cap B$, on peut en déduire que $x \in B$ d'où l'inclusion $A \subset B$.
Par symétrie des rôles joués par A et B, on en déduit que $B \subset A$ et, dès lors, $A = B$.