

100%
ENTRAÎNEMENT

MATHS

PT

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille



1

Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (0, 1, 1)$ et $z = (1, 2, 1)$.

1. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont en somme directe. Vrai Faux
2. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont supplémentaires dans E . Vrai Faux
3. $\text{Vect}(x), \text{Vect}(y)$ et $\text{Vect}(z)$ sont en somme directe. Vrai Faux

Exercice 2 –

Soit E un espace vectoriel de dimension 5 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base de E . On suppose que la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base \mathcal{B} est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$?

Exercice 3 –

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
2. En déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Montrer que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 –

Soit $F = \{(x+y, y-2x, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 6 –

Soit $n \geq 1$. On considère l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans \mathbb{K} .

1. Que peut-on dire du noyau de la trace ?
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(\mathbf{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 –

Soit $n \geq 3$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (X^2 + 1)P''(X)$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la trace de φ .

Exercice 8 –

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On pose :

$$\forall k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, E_k = \text{Ker}(f - k\text{Id}_E)$$

Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Pour aller plus loin

Exercice 9 –

Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 10 –

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines est un supplémentaire du sous-espace vectoriel F de E défini par $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$.

Exercice 11 –

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in E, f \text{ est constante}\} \\ F_2 &= \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \\ F_3 &= \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\} \end{aligned}$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 12 –

Considérons E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension alors ils ont un sous-espace supplémentaire en commun.

Exercice 13 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E ($p \geq 2$).

1. $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$. Vrai Faux
2. Si $\sum_{i=1}^p \dim(F_i) = n$ alors $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Vrai Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\text{Vect}(x) \cap \text{Vect}(y) = \{(0, 0, 0)\}$. Vrai Faux
2. $\dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\text{Vect}(y)) = 2 < \dim(E)$. Vrai Faux
3. $z = x + y$. Vrai Faux

Cours

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et E_1, E_2, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E .

- On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$\sum_{k=1}^p E_k = \left\{ \sum_{k=1}^p x_k, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \right\}$$

La somme de ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E .

- On dit que la somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est *directe* si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, \sum_{k=1}^p x_k = 0_E \implies \forall k \in \{1, \dots, p\}, x_k = 0_{E_k}$$

Dans ce cas, la somme se note $\bigoplus_{k=1}^p E_k = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

- La somme $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe si et seulement si tout élément x de $\sum_{k=1}^p E_k$ se décompose de manière *unique* sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

où pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $x_k \in E_k$.

Exercice 2 –

On remarque que M est une matrice triangulaire par blocs. Il est clair que :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket, u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel stable par u .

Exercice 3 –

Cours

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. La matrice AB est carrée d'ordre n . On a :

Il est important de savoir déterminer l'expression d'un coefficient d'une matrice produit

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n (AB)_{k,k} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p a_{k,i} b_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^p (BA)_{i,i} \\
&= \text{Tr}(BA)
\end{aligned}$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$. On a (en utilisant la question précédente avec les deux matrices PA et P^{-1}) :

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}((PA)P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(I_n A) = \text{Tr}(A)$$

À retenir

Ces deux points de cours sont très importants. Il faut savoir les redémontrer. Le deuxième permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n : c'est la trace commune de toute matrice représentant cet endomorphisme dans une base de E .

Exercice 4 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, A) appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Par linéarité de la transposition, on a alors :

$$M^T = S^T + A^T = S - A$$

Ainsi :

$$M + M^T = 2S \text{ et } M - M^T = 2A$$

donc :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

Il est évident que $M = S + A$. On a :

Linéarité de la transposition 

$$S^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = S$$

Ainsi, S est symétrique. De même, A est antisymétrique. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et l'autre inclusion est vérifiée car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après l'analyse, toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique donc la somme est directe. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Méthode

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Montrer que F et G sont supplémentaires dans E par analyse-synthèse se fait en suivant la démarche suivante :

- Dans l'analyse, on suppose que tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x_F + x_G$ où x_F appartient à F et x_G appartient à G . En utilisant l'appartenance de ces deux vecteurs aux sous-espaces F et G , on obtient l'expression de x_F (ou de x_G) en fonction de x uniquement. L'égalité $x = x_F + x_G$ permet d'obtenir l'autre vecteur en fonction de x . Cette phase d'analyse montre l'unicité de la décomposition d'un vecteur de E comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G si *existence*.
- Dans la synthèse, on prouve effectivement l'existence d'une telle décomposition. On fixe x un vecteur de E et on définit x_F et x_G comme obtenus dans l'analyse. On montre alors que x_F appartient à F , x_G appartient à G et que $x_F + x_G = x$.

Exercice 5 –

G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car $(1, 1, 1)$ est non nul. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x + y, y - 2x, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, -2, 1) + y(1, 1, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, -2, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 car $(1, -2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre.

On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. L'inclusion $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 . Soit $X \in F \cap G$. Le vecteur X appartient à G donc il existe un réel a tel

que :

$$X = a(1, 1, 1)$$

Le vecteur X appartient à F donc il existe deux réels x et y tels que :

$$X = (x + y, y - 2x, x)$$

Ainsi, $x + y = a$, $y - 2x = a$ et $x = a$.

En utilisant que $x = a$, on obtient avec les deux premières égalités $y = 0$ et $y = 2x + a = 3a$. Alors $3a = 0$ donc $a = 0$ et finalement $X = (0, 0, 0)$. On en déduit $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi l'égalité. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ et } F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont donc supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

À retenir

Pas besoin d'analyse-synthèse si l'on souhaite juste prouver que deux sous-espaces vectoriels, d'un espace de dimension finie, sont supplémentaires.

Exercice 6 –

1. La trace est une forme linéaire non nulle (l'image de I_n par l'application trace vaut n qui est différent de 0) donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

Cours

Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension n est un hyperplan de celui-ci : c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

2. On sait que I_n n'appartient pas au noyau de la trace donc par propriété d'un hyperplan, $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Cours

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie et a un vecteur de E n'appartenant pas à H . Alors H et $\text{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 7 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il est évident que $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients réels.

Le degré P'' est inférieur ou égal à $n - 2$ donc par produit, on a :

 Le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes

$$\deg(\varphi(P)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 = n$$

Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est bien définie.

Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation,

on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (X^2 + 1)(\lambda P + Q)'' \\ &= (X^2 + 1)(\lambda P'' + Q'') \\ &= \lambda(X^2 + 1)P'' + (X^2 + 1)Q'' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité. On en déduit que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il suffit de déterminer la trace d'une matrice de φ dans une base fixée de $\mathbb{R}_n[X]$. Utilisons la base canonique. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$. Pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a :

$$\varphi(X^k) = (X^2 + 1)(k(k-1)X^{k-2}) = k(k-1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit alors que :

$$\text{Tr}(\varphi) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^n k(k-1)$$

Déterminons la valeur de cette somme par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \left(\frac{2n-1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)(n-1)}{2} \times \frac{2n+2}{3} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la trace de φ .

🔧 Méthode

La trace d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est par définition, la trace de n'importe quelle matrice de f dans une base de E . Si aucune base n'est suggérée dans l'énoncé d'un exercice, il suffit bien souvent d'utiliser la base canonique de l'espace considéré.

Exercice 8 –

Soit $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ tel que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0_E$$

On a alors :

$$f(x_1 + x_2 + x_3) = f(0_E)$$

On obtient :

f est une application linéaire

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 0_E$$

Or, pour $k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket$, x_k appartient à $\text{Ker}(f - k\text{Id}_E)$ donc $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$ et $f(x_3) = 3x_3$. On en déduit que :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0_E$$

On réitère le procédé précédent :

$$f(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = f(0_E)$$

puis par linéarité de f :

$$f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 0_E$$

et finalement :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0_E$$

On souhaite alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0_E \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0_E \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0_E \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ permettent d'obtenir :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0_E \\ x_2 + 2x_3 = 0_E \\ 3x_2 + 8x_3 = 0_E \end{cases}$$

On utilise maintenant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0_E \\ x_2 + 2x_3 = 0_E \\ 2x_3 = 0_E \end{cases}$$

En remontant les calculs, on obtient alors $x_3 = 0_E$ puis $x_2 = 0_E$ et finalement $x_1 = 0_E$. On en déduit que E_1 , E_2 et E_3 sont en somme directe.

Méthode

Pour résoudre un système linéaire, l'algorithme du pivot de Gauss doit être privilégié pour gagner en efficacité sauf si il y a des équations incomplètes permettant des substitutions efficaces.

Exercice 9 –

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$$