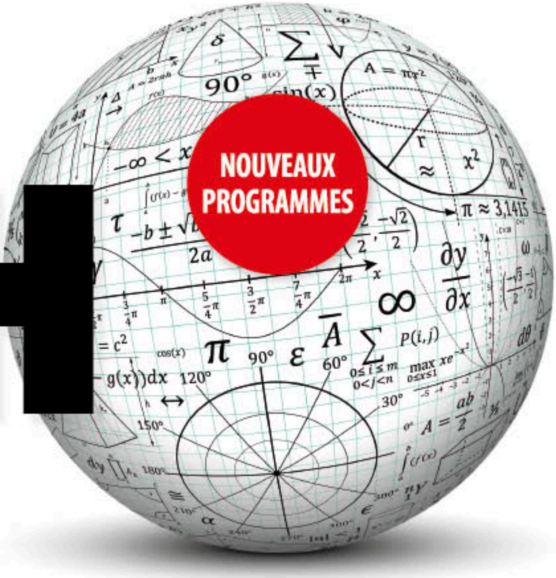
MATH MAX



NOUVEAUX PROGRAMMES

Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

Tle spécialité

- **Le cours complet** avec des exemples et des conseils
- **Des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés** en détail
- Des cahiers de **logique** et d'**algorithmique**
- Des extras pour réviser ou **anticiper sur les années à venir**
- Une approche **testée et validée auprès des élèves**

ellipses

Chapitre I

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

Introduction

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude commencée en classe de première des suites numériques. Après les rappels usuels, nous aborderons le principe fondamental de raisonnement par récurrence, basé sur la construction des nombres entiers naturels. Nous définirons ensuite la notion de limite d'une suite c'est-à-dire l'étude de son comportement pour les valeurs de n de plus en plus grandes, notion fondatrice de l'analyse mathématique.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse. En effet, une suite numérique est l'équivalent *discret* d'une fonction numérique (de variable *continue*). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède pour des calculs d'aires et de volumes ou en Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ. Plus tard, on s'intéresse aux suites afin d'approcher des valeurs numériques (racine carrée d'un nombre par la méthode de Héron d'Alexandrie). L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières (somme des termes d'une suite) dont le but est d'approcher non plus des nombres mais des fonctions. Dans la seconde moitié du XX^e s., le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites. On voit alors littéralement apparaître de magnifiques objets, tel l'ensemble de Mandelbrot. On retrouve aussi l'usage des suites dans les mathématiques financières.

Parallèlement à ces études de limites de suites, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la suite de Fibonacci ou, plus récemment, celle de Syracuse.

Étonnamment, les suites rebutent parfois certains élèves car elles leur semblent inhabituelles, étranges ou incomplètes mais il leur suffit alors de faire l'analogie suivante : si le violon est un instrument « continu », le piano est un instrument « discret ». Ils n'en sont pas moins tous deux harmonieux, parfois même enchanteurs.

1 Suites numériques

Ce paragraphe étant essentiellement constitué de rappels, la plupart des résultats ne seront pas démontrés.

1.1 Définitions

Définition 1 *Une **suite numérique** est une **fonction** de l'ensemble **des entiers naturels dans** $\mathbb{R}$. On note souvent $(u_n)_{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{R}$. Il arrive que la suite soit définie seulement à partir d'un certain entier n_0 ; on dira alors que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ a pour premier terme ou terme initial u_{n_0}.*

Une suite réelle n'est pas forcément « une suite logique ».

Notation : Lorsque une suite (u_n) vérifie une certaine propriété pour les entiers n plus grands qu'un certain n_0, on dit qu'elle la vérifie à partir d'un certain rang *et l'on note **à.p.c.r.*** Par exemple, $2^n > 10$ à partir du rang 4.

Définition 2 ***Variations***
On dit qu'une suite $(\boldsymbol{u_n})$ *est* ***croissante*** *(resp. décroissante, resp. constante ou stationnaire) à.p.c.r. s'il existe* n_0 *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0$, $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$ *(resp.* $u_{n+1} \leqslant u_n$, *resp.* $u_{n+1} = u_n$*).*

Une suite est monotone à.p.c.r. si elle est croissante à.p.c.r. ou décroissante à.p.c.r. ou stationnaire à.p.c.r.

Si les inégalités sont strictes, on parlera de stricte croissance, stricte décroissance et stricte monotonie.

Remarque : Pour étudier la monotonie , on étudiera souvent le signe de $u_{n+1} - u_n$. On pourra aussi comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque la suite est strictement positive.

Définition 3 ***Égalité***
Deux suites $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ *et* $(v_n)_{n \geqslant n_2}$ *sont égales si* $n_1 = n_2$ *et si* $\forall n \geqslant n_1,\ u_n = v_n$*.*
Si $n_1 \neq n_2$ *mais les termes sont tous égaux pour des* n *assez grands, les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont égales à.p.c.r.*

Définition 4 ***Suite majorée, minorée, bornée***
Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{\mathbb{N}}$ *trois suites numériques.*

- $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est* ***majorée*** *s'il existe un réel* M *tel que, pour tout* n, $\boldsymbol{u_n \leqslant M}$*.*
- $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *est dite* ***minorée*** *s'il existe un réel* m *tel que, pour tout* n, $\boldsymbol{v_n \geqslant m}$*.*
- $(w_n)_{\mathbb{N}}$ *est dite* ***bornée*** *s'il existe deux réels* m *et* M *tels que, pour tout entier naturel* n, $\boldsymbol{m \leqslant w_n \leqslant M}$*.*

Exemples :
- La suite $u_n = \pi - \frac{1}{n+1}$ est majorée par π.
- La suite $v_n = n^2 + n + 1$ est minorée par 0.
- La suite $w_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est bornée par -1 et 1.

Remarque : Les bornes ne sont bien sûr pas uniques.

1.2 Suites définies explicitement en fonction de n : $u_n = f(n)$

Soit a un réel et soit f une fonction définie sur $[\,a\,;+\infty\,[$.
$\forall n \geqslant a$, $f(n)$ existe et l'on peut définir la suite $(u_n)_{n \geqslant a} : n \longmapsto u_n = f(n)$.

Propriété 1 *Si* f *est monotone, alors* $(u_n) = \big(f(n)\big)$ *est aussi monotone et de même monotonie que* f*.*

Remarque : Attention, la réciproque est fausse (cf. $u_n = \cos(2\pi n)$).

1.3 Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 5 *Soit une fonction f définie sur un ensemble I tel que $f(I) \subset I$ c.-à-d. $\forall x \in I,\ f(x) \in I$, et soit $u_0 \in I$.*
La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 \in I} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \geqslant 0} \end{cases}$ *existe.*
*On dit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente**.*

Démonstration : Le problème potentiel est que u_n « tombe » sur une valeur interdite de f. Puisque $f(I) \subset I$, si $u_n \in I$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ aussi et l'on peut calculer de proche en proche :

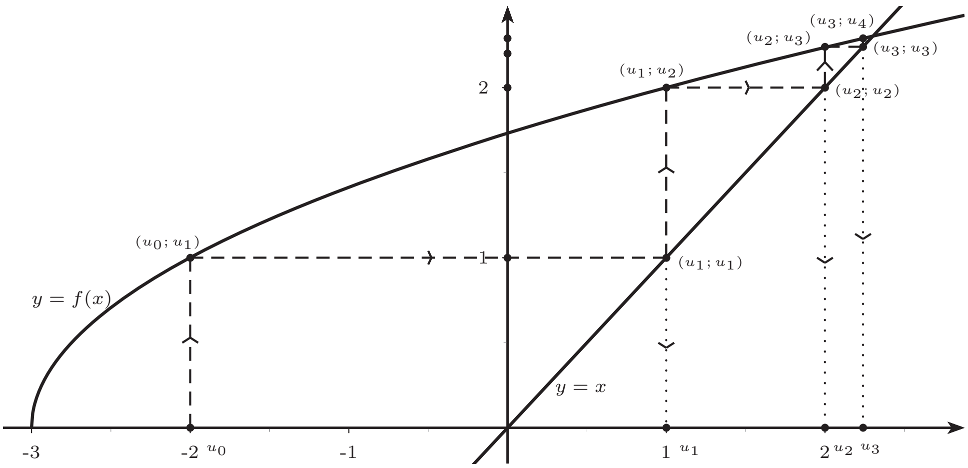
$$u_0 \in I \xmapsto{f} f(u_0) = u_1 \in I \xmapsto{f} f(u_1) = u_2 \in I \xmapsto{f} f(u_2) = u_3 \in I ... \qquad \square$$

Exemple : Soit la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$. Puisque, pour $x \neq 0$, $1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, une telle suite n'est bien définie que si le premier terme appartient à $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

Les termes d'une suite récurrente se calculent *en général* de proche en proche. Pour connaître le n-ième terme, il faut avoir calculé le $(n-1)$-ième.

Exemple : Soit $f : x \in [-3\,;+\infty[\longmapsto \sqrt{x+3}$. On a $f(x) \geqslant 0$ donc $f\big([-3\,;+\infty[\big) \subset [-3\,;+\infty[$. La suite suivante est donc bien définie : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 3}$, $\forall n \geqslant 0$.
On a $u_0 = -2$, $u_1 = \sqrt{u_0+3} = \sqrt{-2+3} = 1$, $u_2 = \sqrt{1+3} = 2$, $u_3 = \sqrt{5}$, $u_4 = \sqrt{3+\sqrt{5}}, ...$

Représentation graphique : On reprend l'exemple précédent.



Propriété 2 ***Égalité des suites récurrentes*** *Soit n_0 un entier naturel.*
Si deux suites (u_n) et (v_n), définies à partir du rang n_0, ont le même terme initial $u_{n_0} = v_{n_0}$ et vérifient la même relation de récurrence, alors elles sont égales c.-à-d. $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n$.

1.4 Suites arithmétiques

Définition & Propriété 3 *Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si chacun de ses termes est obtenu à partir du précédent en **ajoutant une constante** c.-à-d. s'il existe un réel r tel que pour tout entier n,* $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Le réel $\boldsymbol{r}$ *est alors appelé la **raison** de cette suite arithmétique.*
On a, pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n\,r}$ *et plus généralement, pour tous entiers n et p,* $\boldsymbol{u_p = u_n + (p-n)\,r}$.

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique, on montre généralement que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Propriété 4 ***Variations des suites arithmétiques***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .
*$(u_n)_{\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** (resp. décroissante) ssi* $\boldsymbol{r > 0}$ *(resp. $r < 0$).*

Remarque : Ainsi, une suite arithmétique de raison r est une suite définie par récurrence (de fonction de récurrence $f(x) = x + r$) qui est aussi définie explicitement en fonction de n.

Théorème 1 ***Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique***

- *Pour tout entier n, on a* $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.
- *Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour tout entier n, on a :*
$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{i=n} u_i = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}} \,.$$

1.5 Suites géométriques

Définition & Propriété 5 *Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent par **multiplication par une constante** c.-à-d. s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,* $\boldsymbol{u_{n+1} = q\,u_n}$.
Le réel $\boldsymbol{q}$ *est alors appelé **raison** de cette suite géométrique.*
On a, pour tout entier $n > 0$, $\boldsymbol{u_n = u_0\,q^n}$ *et plus généralement, pour tous entiers n et p,* $\boldsymbol{u_p = q^{p-n}\,u_n}$.

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique, on montre généralement que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Remarque : Ainsi, une suite géométrique de raison q est une suite définie par récurrence (de fonction de récurrence $f(x) = qx$) qui est aussi définie explicitement en fonction de n.

Théorème 2 ***Variations*** *Soit q un réel.*

- *Si $q > 1$,* *la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $0 < q < 1$,* *la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
- *Si $q < 0$,* *la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*
- *Si $q = 0$ ou 1,* *la suite $(q^n)_{\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.*

Remarque : Attention au signe de u_0 lors de l'étude des variations de $(q^n\, u_0)$.

Théorème 3 ***Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Pour tout entier n, on a : $$\sum_{i=0}^{i=n} \boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{u_0} \, \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{q}}\,.$$

Remarque : Cette formule peut se lire : $$S = (1^{er} \textit{ terme}) \times \frac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}\,.$$

2 Raisonnement par récurrence

2.1 Principe de récurrence

Axiome Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :
- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie (*hérédité*).

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (*conclusion*).

Imaginons un escalier infini dont on a numéroté dans l'ordre chacune des marches. Si l'on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation) et si l'on peut monter d'une marche quelconque à la suivante (hérédité), alors on peut accéder à n'importe quelle marche au-dessus de n_0 (conclusion).

On peut aussi imaginer une succession infinie de dominos dressés. Il nous est bien évident que si l'on en fait basculer un (initialisation) et si les dominos sont espacés les uns à la suite des autres d'une distance adéquate (hérédité), alors tous les suivants basculeront, dans une amusante et colorée cataracte.

Ce type de démonstration aurait été pour la première fois utilisé explicitement par Blaise Pascal en 1665 mais il faudra attendre deux siècles pour une formalisation et une axiomatisation du raisonnement par récurrence par, indépendamment, l'allemand Dedekind et l'italien Péano en 1888.

2.2 Démonstrations par récurrence

Remarque importante : La phase d'initialisation est essentielle. En effet, si par exemple $\mathcal{P}(n)$ est la propriété « 10^n est multiple de 9 », on a $10^n = 9 \times k$ implique

$10^{n+1} = 10^n \times 10 = 9 \times (k \times 10)$ et l'on a bien $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ mais la propriété est évidemment fausse pour tout n.

La propriété suivante se démontre par récurrence et sera bien utile par la suite.

Propriété 6
Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Démonstration : Soit x un réel positif.
On appelle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ ».
- Initialisation : Pour $n=0$, on a $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence.

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{1+x>0}{\overset{\mathcal{P}(n)}{\geqslant}} (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
- Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 0 donc, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n. □

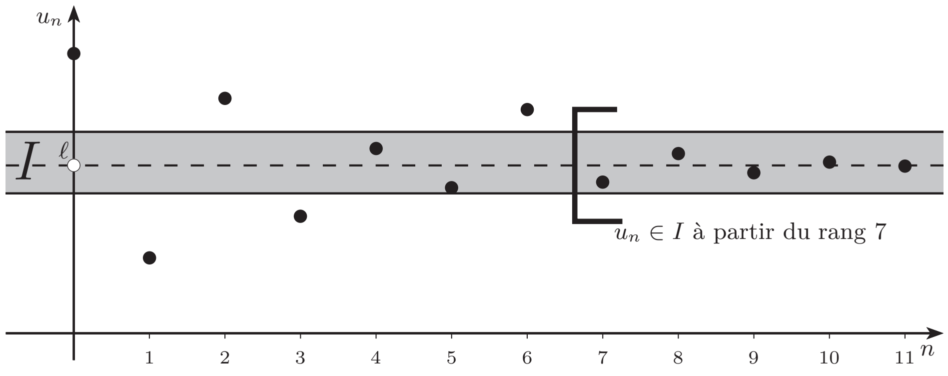
3 Limite d'une suite : définition

Lorsque l'on étudie une suite, ce sont souvent les termes de rang élevé ou ceux de rang tendant vers l'infini qui nous intéressent et non pas les premiers termes. On étudie alors le comportement asymptotique de la suite, c'est-à-dire le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini.

Définition 6 ***Suites convergentes***
Soit ℓ un réel et soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite.
(u_n) converge vers ℓ *(ou a pour limite ℓ) signifie que* ***tout intervalle ouvert*** *contenant ℓ contient* ***tous les termes*** *de la suite (u_n)* ***à.p.c.r.*** *On dit alors que (u_n) est* ***convergente****.* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

$\iff$ *$\forall$ I intervalle ouvert contenant ℓ,* $\underbrace{\exists n_1 \geqslant n_0,\ \forall n \geqslant n_1,}_{\text{à.p.c.r.}}\ u_n \in I$.

Une suite qui ***ne converge pas*** *vers un réel est dite* ***divergente****.*



Remarques :

- La définition suppose de connaître le nombre ℓ avant de démontrer que c'est bien la limite de (u_n).
- On peut réécrire cette définition en disant « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux ».
- Converger vers ℓ signifie que l'on est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Les intervalles I doivent impérativement être ouverts. En effet, on pourrait prendre $I =]\,\ell - 1\,;\ell\,]$, ou même $\{\ell\}$, et ainsi être proche de ℓ mais pas dans I.
- La limite d'une suite ailleurs qu'en l'infini n'a pas de sens (on n'écrit d'ailleurs pas toujours $n \to +\infty$) : n ne peut tendre vers 13 par exemple puisque soit $n = 13$, soit n est « loin » de 13.
- Pour démontrer que (u_n) converge vers ℓ, on démontre souvent que $|u_n - \ell|$ peut être aussi petit que l'on veut et converge donc vers 0.
- La définition impose de tester tous les intervalles ouverts autour de ℓ mais il faut bien s'imaginer que ce sont les « petits » intervalles autour de ℓ qui sont intéressants et qui nécessitent de prendre les termes les plus « lointains » de la suite, au contraire de $\mathbb{R}$ par exemple, qui les contient tous.
- Attention à la coexistence des deux notations $\xrightarrow[n\to+\infty]{}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$ qu'il ne faut surtout pas mélanger. La limite ne tend pas et la fonction n'est pas égale à sa limite. On est ici entre *infini potentiel* et *infini achevé* mais cela nous entraine sur un sujet philosophique qui n'est pas l'objet de ce cours.

Exemples : ◦ La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 : Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Il existe alors $\varepsilon \in I$ positif. Pour tout $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $\frac{1}{n} \in I$ à partir du rang $Ent\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ où l'on note $\boldsymbol{Ent(x)}$ la **partie entière** de x : le plus grand entier inférieur ou égal à x.

◦ La suite $(-1)^n$ diverge : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\ell = 1$, l'intervalle ouvert $]\,0\,;2\,[$ ne contient pas une infinité de termes, ceux de rang impair. De même si $\ell = -1$ pour $]\,-2\,;0\,[$ et les rangs pairs. Si $\ell \neq \pm 1$, on peut aisément trouver un intervalle ouvert contenant ℓ mais ne contenant ni 1 ni -1, ne contenant donc aucun terme de la suite.

Propriété 7 ***Unicité de la limite***
*Si une suite est **convergente**, alors sa **limite** est **unique**.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ et soit λ un réel différent de ℓ. Nous allons montrer que (u_n) ne peut converger vers λ.
Supposons $\lambda < \ell$. Posons $\mu = \dfrac{\ell + \lambda}{2}$ et $I =]\,\mu\,;+\infty\,[$. On a $\lambda < \mu < \ell$ donc $\ell \in I$ et $u_n \in I$ à partir d'un certain rang n_0 puisque (u_n) converge vers ℓ. Ainsi $u_n \notin]\,-\infty\,;\mu\,[$ à partir du rang n_0 alors que $\lambda \in]\,-\infty\,;\mu\,[$. (u_n) ne peut donc converger vers λ. (Si $\lambda > \ell$, il suffit de changer I en $]\,-\infty\,;\mu\,[$). □