100% ENTRAÎNEMENT

MATHS

PSI

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

1 Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (0, 1, 1)$ et $z = (1, 2, 1)$.

1. Vect(x) et Vect(y) sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Vect(x) et Vect(y) sont supplémentaires dans E. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Vect(x),Vect(y) et Vect(z) sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 –

Soit E un espace vectoriel de dimension 5 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base de E. On suppose que la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$?

Exercice 4 –

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité fondamentale suivante :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

2. En déduire que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –
Montrer que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 –
Soit $F = \{(x+y, y-2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 –
Soit $n \geq 1$. On considère l'application trace définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Que peut-on dire du noyau de la trace ?
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(\text{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8 –
Soit $n \geq 3$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X^2 + 1)P''(X)$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la trace de φ.

Exercice 9 –
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On pose :

$$\forall k \in [\![1\,;\,3]\!],\ E_k = \text{Ker}(f - k\text{Id}_E)$$

Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Exercice 10 –
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$$

Pour aller plus loin

Exercice 11 –
Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 12 –

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines est un supplémentaire du sous-espace vectoriel F de E défini par $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$.

Exercice 13 –

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F_1 = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}$$
$$F_2 = \{f \in E,\ \forall t \in [-1, 0],\ f(t) = 0\}$$
$$F_3 = \{f \in E,\ \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0\}$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 14 –

Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension alors ils ont un sous-espace supplémentaire en commun.

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E ($p \geq 2$).

1. $\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Si $\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = n$ alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.	☐ Vrai	☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\mathrm{Vect}(x) \cap \mathrm{Vect}(y) = \{(0, 0, 0)\}$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $\dim(\mathrm{Vect}(x)) + \dim(\mathrm{Vect}(y)) = 2 < \dim(E)$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $z = x + y$.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k,\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \right\}$$

  La somme de ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ est *directe* si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in \{1, \dots p\},\ x_k = 0_E$$

  Dans ce cas, la somme se note $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

- La somme $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ est directe si et seulement si tout élément x de $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ se décompose de manière *unique* sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

  où pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $x_k \in E_k$.

Exercice 2 –

Un calcul de déterminant par blocs montre que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

donc $\det(A) = 1 \times 3 = 3$.

Cours

Soit A une matrice carrée de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(A) = \det(B)\det(D)$$

Exercice 3 –

On remarque que M est une matrice triangulaire par blocs. Il est clair que :

$$\forall i \in [\![1\,;\,3]\!],\ u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel stable par u.

Exercice 4 –

Cours

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

Il est important de savoir déterminer l'expression d'un coefficient d'une matrice produit

1. La matrice AB est carrée d'ordre n. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}b_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} (BA)_{i,i} \\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

2. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$. On a (en utilisant la question précédente avec les deux matrices PA et P^{-1}) :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((PA)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n A) = \mathrm{Tr}(A)$$

À retenir

Ces deux points de cours sont très importants. Il faut savoir les redémontrer. Le deuxième permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n : c'est la trace commune de toute matrice représentant cet endomorphisme dans une base de E.

Exercice 5 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, A) appartenant à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Par linéarité de la transposition, on a alors :

$$M^T = S^T + A^T = S - A$$

Ainsi :

$$M + M^T = 2S \ \text{ et } \ M - M^T = 2A$$

donc :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

Il est évident que $M = S + A$. On a :

Linéarité de la transposition

$$S^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = S$$

Ainsi, S est symétrique. De même, A est antisymétrique. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et l'autre inclusion est vérifiée car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après l'analyse, toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique donc la somme est directe. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Méthode

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E par analyse-synthèse se fait en suivant la démarche suivante :

- Dans l'analyse, on suppose que tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x_F + x_G$ où x_F appartient à F et x_G appartient à G. En utilisant l'appartenance de ces deux vecteurs aux sous-espaces F et G, on obtient l'expression de x_F (ou de x_G) en fonction de x uniquement. L'égalité $x = x_F + x_G$ permet d'obtenir l'autre vecteur en fonction de x. Cette phase d'analyse montre l'*unicité* de la décomposition d'un vecteur de E comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G si *existence*.
- Dans la synthèse, on prouve effectivement l'existence d'une telle décomposition. On fixe x un vecteur de E et on définit x_F et x_G comme obtenus dans l'analyse. On montre alors que x_F appartient à F, x_G appartient à G et que $x_F + x_G = x$.

Exercice 6 –

G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car $(1, 1, 1)$ est non nul. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x + y, y - 2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, -2, 1) + y(1, 1, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, -2, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 car $(1, -2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre.

On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. L'inclusion $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit $X \in F \cap G$. Le vecteur X appartient à G donc il existe un réel a tel que :

$$X = a(1, 1, 1)$$

Le vecteur X appartient à F donc il existe deux réels x et y tels que :

$$X = (x + y, y - 2x, x)$$

Ainsi, $x + y = a$, $y - 2x = a$ et $x = a$.

En utilisant que $x = a$, on obtient avec les deux premières égalités $y = 0$ et $y = 2x + a = 3a$. Alors $3a = 0$ donc $a = 0$ et finalement $X = (0, 0, 0)$. On en déduit $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi l'égalité. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

À retenir

Pas besoin d'analyse-synthèse si l'on souhaite juste prouver que deux sous-espaces vectoriels, d'un espace de dimension finie, sont supplémentaires.

Exercice 7 –

1. La trace est une forme linéaire non nulle (l'image de I_n par l'application trace vaut n qui est différent de 0) donc son noyau est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

   Cours

   Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension n est un hyperplan de celui-ci : c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

2. On sait que I_n n'appartient pas au noyau de la trace donc par propriété d'un hyperplan, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   Cours

   Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie et a un vecteur de E n'appartenant pas à H. Alors H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 8 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il est évident que $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients réels.

   Le degré P'' est inférieur ou égal à $n - 2$ donc par produit, on a :

   Le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes

   $$\deg(\varphi(P)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 = n$$

   Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est bien définie.

   Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (X^2+1)(\lambda P + Q)'' \\ &= (X^2+1)(\lambda P'' + Q'') \\ &= \lambda(X^2+1)P'' + (X^2+1)Q'' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité. On en déduit que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il suffit de déterminer la trace d'une matrice de φ dans une base fixée de $\mathbb{R}_n[X]$. Utilisons la base canonique. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$. Pour tout $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, on a :

$$\varphi(X^k) = (X^2+1)(k(k-1)X^{k-2}) = k(k-1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)$$

Déterminons la valeur de cette somme par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{2n-1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(n-1)(n-1)}{2} \times \frac{2n+2}{3} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la trace de φ.

Méthode

La trace d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est par définition, la trace de n'importe quelle matrice de f dans une base de E. Si aucune base n'est suggérée dans l'énoncé d'un exercice, il suffit bien souvent d'utiliser la base canonique de l'espace considéré.

Exercice 9 –

Soit $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ tel que :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0_E$$

On a alors :

$$f(x_1 + x_2 + x_3) = f(0_E)$$