

PCSI
MPSI/PTSI
PSI

*Bertrand Beaufls
Patrick Beynet
Stéphanie Calmettes
Walter Damin
Thierry Finot
Ivan Gozard
Marie-Laure Kaiser-Lavielle
Nicolas Nguyen
Lionel Vidal*

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE



MATHS
PHYSIQUE
CHIMIE
SII

3^e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil



Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Logique

Assertions

Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \rightarrow \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E .

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \text{ ou } Q \Leftrightarrow Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \Leftrightarrow Q \text{ et } P$

P , Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow P \text{ et } (Q \text{ et } R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } Q)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff \text{non}(\text{non}P)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- **Existentiel** : il existe un élément de E vérifiant P . On note $\exists x \in E \ P(x)$.
- **Universel** : tous les éléments de E vérifient P . On note $\forall x \in E \ P(x)$.

S'il existe un unique élément de E vérifiant P , on note $\exists! x \in E, \ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $\text{non}(\exists x \in E; \ P(x)) \iff (\forall x \in E, \ \text{non } P(x))$
- $\text{non}(\forall x \in E, \ P(x)) \iff (\exists x \in E; \ \text{non } P(x))$
- $\forall x \in E, \ \forall y \in F, \ P(x, y) \iff \forall y \in F, \ \forall x \in E, \ P(x, y)$
- $\exists x \in E, \ \exists y \in F, \ P(x, y) \iff \exists y \in F, \ \exists x \in E, \ P(x, y)$

Stratégies pour une implication

- $P \Rightarrow Q$
 - $(\text{non } P) \text{ ou } Q$
 - $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$
 - $\text{non}[P \text{ et } \text{non } Q]$.

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit \mathcal{P} une propriété des éléments de \mathbb{N} , et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)) \end{cases}$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0), (\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E . On dit que

- A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B .
- A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la **réunion** de A et B .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B .
- $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la **différence** de A et B .

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} .$$

$\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ est la *fonction indicatrice* de A .

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} .$

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- **injective** si $(\forall (x, x') \in E \times E), (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$;
- **surjective** si $(\forall y \in F), (\exists x \in E) ; y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e. $(\forall y \in F), (\exists! x \in E) ; y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \rightarrow E$, appelée **application réciproque** de f , par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}.$$

f bijective $\iff \exists g : F \rightarrow E$ $\begin{cases} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{cases}$ En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f .

Composée de bijections

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective} \quad \text{et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$.

- **L'image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par $f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\}$.
- **L'image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Rudiments d'arithmétique dans \mathbb{N}

Relation de divisibilité dans \mathbb{N}

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a , s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$. On note cette relation $b \mid a$.

Division euclidienne dans \mathbb{N}

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

PGCD, PPCM de deux entiers

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers.

- Si a ou b est non nul, le plus grand entier, diviseur de a et de b est appelé **plus grand diviseur commun** à a et b . Cet entier naturel est noté $\text{PGCD}(a, b)$.

- Si a et b sont non nuls, le plus petit entier strictement positif, multiple de a et de b est appelé **plus petit multiple commun** à a et b . Cet entier naturel est noté $\text{PGCD}(a, b)$.

Nombres premiers

On appelle **nombre premier** tout entier naturel $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs dans \mathbb{N} sont 1 et p lui-même. Un entier naturel $n \geq 2$ qui n'est pas premier est dit **composé**. On note \mathfrak{P} l'ensemble des nombres premiers.

- Un entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.
- Un entier $n \geq 2$ composé admet un diviseur premier p vérifiant $p \leq \sqrt{n}$.

L'ensemble \mathfrak{P} des nombres premiers est infini.

Décomposition primaire d'un entier

Tout entier $n \geq 2$ se décompose de manière unique sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_N^{\alpha_N}$$

p_1, \dots, p_N sont premiers
($p_1 < \dots < p_N$) et
 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ des entiers
naturels non nuls.

Cette écriture s'appelle la **décomposition d'un entier en produit de nombres premiers**.

*Nous devons plutôt nous fier
au calcul algébrique qu'à notre jugement.*

Leonhard Euler

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Compléments de calcul algébrique

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On note

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{0 \leq k \leq n} x_k \text{ la somme des } x_k$$

$$P_n = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^n x_k = \prod_{k \in \{0, \dots, n\}} x_k \text{ le produit des } x_k.$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

$$\sum_{k=0}^n [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_0$$

Somme télescopique
 $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle** de n . On note $n! = \prod_{k=1}^n k$.

On convient que $0! = 1$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Coefficients du binôme
où $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a .

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble \mathcal{S} des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues (\mathcal{S}) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j , $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$, $(L_i \leftarrow \lambda_i L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j ($i \neq j$), $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Inégalités dans \mathbb{R}

La relation \leq vérifie les propriétés suivantes :

- **réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- **antisymétrie** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- **transitivité** : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.

On dit que \leq est une **relation d'ordre** dans \mathbb{R} . De plus, cet ordre est total car

- **ordre total** : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

On note $x < y$ la relation $x \leq y$ et $x \neq y$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, x + t < y + t$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}, x t < y t$.

Pour tout réel x , on définit la **valeur absolue** de x par

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \geq ||x| - |y||$

Inégalités triangulaires

M Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$, unique tel que $p \leq x < p + 1$. Cet entier relatif p est appelé **partie entière** de x . On note $p = \lfloor x \rfloor$.

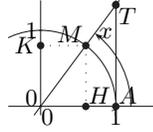
Compléments de trigonométrie

Le cercle trigonométrique

$$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$\bullet \cos(x) = \overline{OH}, \sin(x) = \overline{OK}$$

$$\bullet \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\bullet \cos(2\pi + x) = \cos(x) \bullet \cos(\pi + x) = -\cos(x) \bullet \cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\bullet \cos(-x) = \cos(x) \bullet \cos(\pi - x) = -\cos(x) \bullet \cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\bullet \sin(2\pi + x) = \sin(x) \bullet \sin(\pi + x) = -\sin(x) \bullet \sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\bullet \sin(-x) = -\sin(x) \bullet \sin(\pi - x) = \sin(x) \bullet \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\bullet \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \bullet \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\bullet \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \bullet \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\bullet \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \bullet \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\bullet \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\bullet \sin(2a) = 2\sin a \cos a \bullet \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$