Sophie Sidaner
Évelyne Perrin

270 exercices essentiels de mathématiques

avec indications, solutions détaillées et résumés de cours pour réussir les concours

PC
PC*

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

Chapitre 1

Intégrales généralisées

A. Résumé de cours

Les fonction considérées sont définies sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

I. Intégration de fonctions continues par morceaux

1. Fonctions continues par morceaux

Définition : Une fonction définie sur un segment $S = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur S si et seulement si elle admet un nombre fini de points de discontinuité et en chacun de ces points, elle admet une limite à droite et une limite à gauche.

Propriétés :

- Sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[\subset [a, b]$ où f est continue, elle est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i .
- $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$, ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Une fonction est **continue par morceaux sur** I intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Propriété : $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$, ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2. Intégrale sur un segment

Théorème-définition : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.
Soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$. On désigne par f_i le prolongement par continuité de f sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout i compris entre 0 et $n-1$. Le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la subdivision et est appelé **l'intégrale sur** $[a,b]$ de f notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Propriétés :

- $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$. De plus, elle est positive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- L'intégrale est invariante par translation c'est à dire que si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel c,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\mathrm{d}x$$

- Si deux fonctions continues par morceaux ne diffèrent qu'en un nombre fini de points sur $[a,b]$, elles ont même intégrale sur $[a,b]$.
- **Inégalité de la moyenne :** Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ et M un majorant de f sur $[a,b]$. On a l'inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq M(b-a) \cdot$$

- **Relation de Chasles :** Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ et $a < c < b$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Théorème de changement de variable :
Étant données une fonction f continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et une fonction φ à valeurs dans I, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, on a alors :

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t \cdot$$

et sa variante :
Étant données une fonction f continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et une fonction φ à valeurs dans I, strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, on a alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t)\mathrm{d}t \cdot$$

II. Intégrales généralisées

1. Intégrale impropre sur $[a, +\infty[$

Définition : Si f est une application continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, intégrale de f sur $[a, +\infty[$, est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$ notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Dans le cas contraire, elle est **divergente**. On dit aussi que l'intégrale est convergente ou divergente en $+\infty$.

Remarque : Justifier l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ c'est prouver sa convergence.

Propriétés :

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est bornée sur $[a, +\infty[$.
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

2. Intégrales généralisées sur un intervalle

Définition : Soit f continue par morceaux sur I de bornes a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- $I = [a, b[$: l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie en b.

- $I =]a, b]$: l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers a.

Dans le cas de convergence, la limite est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.

Théorème-définition : Soit f une application continue par morceaux sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit c un élément de $]a, b[$.
La convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de c et en cas de convergence, leur somme est indépendante de c. Dans le cas de convergence des intégrales précédentes, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite **convergente** et on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque : L'intégrale de f sur I de bornes a et b (incluses ou non dans I) est convergente si et seulement si f est d'intégrale convergente sur $]a, b[$. Ainsi si f est continue sur $[a, b[$ est prolongeable par continuité en b, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente. On dit alors que l'intégrale est faussement impropre en b.

Lien avec les primitives :

- Soit f continue par morceaux sur I de bornes a et b et à valeurs positives. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si il existe un point c de I tel que $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ est bornée (et alors pour tout point d de I, $x \mapsto \displaystyle\int_d^x f(t)\mathrm{d}t$ est bornée).

- Soit f une fonction continue sur I de bornes a et b et F une primitive de f sur I. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si F a une limite en a et en b et on a alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_b F - \lim_a F\ .$$

3. Propriétés

- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I d'intégrale convergente est un espace vectoriel sur lequel $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.
- L'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux positive est positive.
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle de bornes a et b à valeurs réelles, d'intégrales convergentes sur cet intervalle et vérifiant $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Soit f continue par morceaux sur un intervalle de bornes a et b et d'intégrale convergente sur cet intervalle. Alors pour tout réel c strictement compris entre a et b, $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Intégration par parties généralisée :
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I de bornes a et b telles que fg a une limite finie en a et en b. Les intégrales de fg' et $f'g$ sur I sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème de changement de variables :
Si $\varphi :\ ]\alpha, \beta[\ \to\ ]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :\ ]a, b[\ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et les deux intégrales sont égales en cas de convergence.

Ce résultat s'adapte lorsque φ est décroissante :
Si $\varphi :\ ]\alpha, \beta[\ \to\ ]a, b[$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :\ ]a, b[\ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et les deux intégrales sont opposées en cas de convergence.

III. Fonctions intégrables

1. Intégrales absolument convergentes

Définitions : On dit que f, continue par morceaux sur I, a une **intégrale absolument convergente** si l'intégrale de la fonction $|f|$ sur I est convergente.
Une fonction f est dite **intégrable sur** I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente. L'intégrale de f sur I est alors noté $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\mathrm{d}t$.
Si $I = [a, b[$ (respectivement $]a, b]$), f est dite aussi intégrable en b (respectivement en a).

Remarque : Pour une fonction à valeurs réelles de signe constant, l'absolue convergence de son intégrale équivaut à sa convergence.

Théorème : Soit f une fonction continue par morceaux sur I de bornes a et b et d'intégrale absolument convergente sur I. L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente et on a $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.

Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente. Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$ mais son intégrale sur $]0, +\infty[$ est convergente (La démonstration de ce résultat est proposée en exercice page 21).

Remarque : par le théorème de changement de variables, si φ est une bijection strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans J, et si $f : J \to \mathbb{C}$ est continue alors $u \mapsto f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)$ est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur J.

Propriétés :

- L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
- Si f est une fonction continue intégrable et positive sur I telle que $\int_I f = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

2. Relations de comparaison :

Théorème :
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ avec b réel ou égal à $+\infty$:
- si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f.
- si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f en b est équivalente à celle de g.

Comme si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$, la première des propriétés précédentes donne :

- si $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f.

Ces relations sont souvent utilisées pour montrer la convergence de fonctions de signe constant.

De même, pour f et g fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$:

- si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en a implique celle de f.
- si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f en a est équivalente à celle de g.

3. Fonctions de référence

Les théorèmes de comparaison sont souvent utilisés avec les fonctions de référence suivantes :

Intégrales de Riemann :
$t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
$t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

Autres fonctions de référence :

Théorème : $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable en 0^+.

Propriétés :

- $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+.
- $x \mapsto f(x)$ est intégrable en b^- si et seulement si $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0^+.
- $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si α est strictement inférieur à 1.

B. Exercices

Des indications pour certains d'entre eux commencent en page 22.

I. Intégrales sur un segment

La correction de ces exercices commence en page 24.

Exercice 1. (**Vers la solution**)
Soit f une fonction positive continue par morceaux sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle. Prouver que cette fonction est nulle sauf en un nombre fini de points.

Exercice 2. (**Vers la solution**)
Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que

$$|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\ .$$

1. Lorsque f est à valeurs réelles, prouver que f est de signe constant.

2. Dorénavant f est à valeurs complexes. Dans cette question , on suppose de plus que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est à valeurs réelles.

3. Montrer que si f est à valeurs complexes, il existe un réel θ tel que

$$f = \mathrm{e}^{i\theta}|f|\ .$$

Exercice 3. (**Vers la solution**)
Soient f et g deux applications de $S = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que f est positive.
1. Formule de la moyenne généralisée : démontrer qu'il existe un élément c de S tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt\ .$$

2. Vérifier que si f ne s'annule pas, $c \in\ ]a,b[$.

3. Application : Soit g continue au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tg(t)\,dt\ .$$