

Bekkai Messirdi
Abdellah Gherbi
Sofiane Messirdi

Distributions : théorie et illustrations

Cours avec 155 exercices corrigés



Table des matières



Introduction	i
1 Espaces vectoriels topologiques localement convexes	1
1.1 Rappels de topologie	1
1.2 Espaces Vectoriels Topologiques : EVT	9
1.3 Topologie définie par une famille de semi-normes	19
1.4 Espaces localement convexes : ELC	25
1.5 Exercices avec solutions	28
2 Convolution des fonctions continues	47
2.1 Définitions et propriétés	47
2.2 Continuité et dérivabilité du produit de convolution	50
2.3 Formule de Leibniz	53
2.4 Exercices avec solutions	56

3	Espaces fonctionnels fondamentaux	81
3.1	Mesure de Radon sur un ouvert de \mathbb{R}^n	81
3.1.1	Espace $k(U)$	81
3.1.2	Espace $\mathcal{D}(U)$	85
3.2	Suites régularisantes	88
3.3	Topologie des espaces $\mathcal{D}(U, K)$ et $\mathcal{D}(U)$	93
3.4	Partition de l'unité dans $\mathcal{D}(U)$	95
3.5	Le dual de l'espace $k(U)$	100
3.6	Exercices avec solutions	101
4	Distribution sur un ouvert de \mathbb{R}^n	115
4.1	Définitions et propriétés	116
4.2	Support d'une distribution	123
4.3	Théorème de recollement des distributions	127
4.4	Opérations sur les distributions	131
4.4.1	Addition, soustraction, multiplication par un scalaire	131
4.4.2	La translatée d'une distribution	131
4.4.3	Transposition	132
4.4.4	Dilatation (homothétie ou changement d'unité)	132
4.4.5	Dérivation des distributions	132
4.4.6	Propriétés de la dérivation distributionnelle	136
4.5	Dérivation d'une fonction discontinue	139
4.5.1	Formule des sauts	139
4.5.2	Multiplication d'une distribution par une fonction C^∞	140
4.5.3	Propriétés	142
4.6	Distributions à support compact	144
4.7	Convergence des distributions	148

4.8	Exercices avec solutions	152
5	Produit tensoriel et convolution des distributions . .	191
5.1	Produit tensoriel des distributions	191
5.2	Produit de convolution des distributions	201
5.3	Régularisation C^∞ des distributions	210
5.4	Exercices avec solutions	213
6	Transformation de Fourier	245
6.1	Transformation de Fourier des fonctions sommables	245
6.2	Espace de Schwartz et distributions tempérées	252
6.2.1	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Schwartz	252
6.2.2	L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées	265
6.3	Transformation de Fourier	270
6.3.1	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	270
6.3.2	Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$	278
6.3.3	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	280
6.4	Transformation de Fourier et convolution	286
6.4.1	Transformation de Fourier de la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	286
6.4.2	Transformation de Fourier de la convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	287
6.4.3	Transformation de Fourier de la convolution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	288
6.5	Le théorème de Paley-Wiener	289
6.6	Exercices avec solutions	294
7	Transformation de Laplace	343
7.1	Transformation de Laplace des fonctions	343
7.1.1	Définitions et premières propriétés	343
7.1.2	Formule d'inversion	351

7.1.3 Comportements asymptotiques	354
7.2 Transformation de Laplace des distributions	356
7.3 Applications de la transformation de Laplace	359
7.3.1 Solutions causales d'équations différentielles	359
7.3.2 Solutions d'équations de convolution	366
7.3.3 Solutions d'équations intégrales	368
7.4 Exercices avec solutions	375
8 Espaces de Sobolev	427
8.1 Définitions et premières propriétés	428
8.2 Injections de Sobolev	450
8.2.1 Injections continues	450
8.2.2 Injections compactes	461
8.2.3 Cas des ouverts bornés de \mathbb{R}^n	464
8.3 Traces des espaces $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ et $H^m(\Omega)$	472
8.3.1 Cas du demi-espace	473
8.3.2 Trace de l'espace $H^1(\mathbb{R}_+^n)$	474
8.3.3 Trace des espaces $H^m(\mathbb{R}_+^n)$	476
8.3.4 Trace des espaces $H^m(\Omega)$	477
8.4 Inégalités fonctionnelles	479
8.5 Exercices avec solutions	482
Bibliographie	523
Index	525