OPTIMUM

1re et 2e année

Toute l'algèbre

Maths appliquées

ECG

- Cours et méthode
- Astuces et pièges à connaître
- Exercices et problèmes d'entraînement
- QCM d'évaluation et extraits d'annales

Hédi **Joulak**

ellipses

L'essentiel du cours

Éléments de logique

Définitions de base

⋆ Une expression est un ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc.) possédant une signification dans un univers donné.

⋆ Une proposition propose l'expression d'un fait. Une proposition est synonyme d'énoncé.

⋆ Un axiome est une proposition dont on admet qu'elle est vraie.

⋆ Un théorème est une proposition dont il faut établir la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.

Par exemple, « $3x^2 + 4x - 5$ » est une expression, « $3x^2 + 4x - 5 = 0$ » est une proposition, « tout entier naturel a un unique successeur » est un axiome, « il y a une infinité de nombres premiers » est un théorème.

Connecteurs logiques

⋆ *Connecteur logique Non* : Nier une proposition, c'est passer de la définition d'une partie d'un ensemble à la définition de son complémentaire. C'est le seul connecteur qui porte sur une seule proposition.

⋆ *Connecteur logique Et* : La proposition (P et Q), notée $P \wedge Q$, est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies, la proposition $P \wedge Q$ est fausse dans tous les autres cas.

⋆ *Connecteur logique Ou* : La proposition (P ou Q), notée $P \vee Q$, est fausse si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses, la proposition $P \vee Q$ est vraie dans tous les autres cas.

$\star$ *Connecteur logique Si...alors* : La proposition (Si P alors Q), notée $P \Longrightarrow Q$ est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse, la proposition $P \Longrightarrow Q$ est vraie dans tous les autres cas.

$\star$ *Connecteur logique Si et seulement si* : La proposition (P si et seulement si Q), notée $P \Longleftrightarrow Q$, est vraie lorsque l'on a simultanément P et Q vraies ou fausses, la proposition est fausse dans tous les autres cas.

Lorsque l'on a $P \Longrightarrow Q$, on dit que Q est une condition nécessaire à P et P est une condition suffisante à Q.

La réciproque de $P \Longrightarrow Q$ est l'implication $Q \Longrightarrow P$.

La négation de $P \Longrightarrow Q$ est (P Et Non(Q)).

Le conseil du prof :
Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ il est parfois plus facile de démontrer que si l'on n'a pas Q alors on n'a pas P (c'est-à-dire Non(Q)$\Longrightarrow$ Non(P)). Cela s'appelle la contraposée.

Négations

$\star$ La négation de « Et » est « Ou » .

$\star$ La négation de « Ou » est « Et » .

Quantificateurs

Le quantificateur universel

Un quantificateur permet de préciser le domaine de validité d'une proposition. Le symbole $\forall$ qui signifie « quel que soit » ou « pour tout » représente le quantificateur universel.
Il doit toujours être suivi du signe d'appartenance $\in$.

Le quantificateur existentiel

Le symbole $\exists$ qui signifie « il existe au moins...tel que » représente le quantificateur existentiel.
On peut éventuellement rajouter un point d'exclamation pour montrer l'unicité. On a alors : $\exists$! qui signifie « il existe un unique...tel que » .

Le conseil du prof :
L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$ *signifie que quel que soit le réel* x*, il existe au moins un réel* y *tel que* y *soit supérieur à* x *; ceci est vrai, car on peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné.*
Alors que $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y > x$ *signifie qu'il existe au moins un réel* x *tel que pour tout réel* y*,* y *soit supérieur à* x *; ceci est faux, car on ne peut trouver un réel inférieur à tous les autres.*

Négations

$\star$ La négation de $\forall$ (pour tout) est $\exists$ (il existe au moins...).

$\star$ La négation de $\exists$ (il existe au moins...) est $\forall$ (pour tout).

Types de raisonnement

La récurrence simple

On veut démontrer :
$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}$ est une propriété dépendant de l'entier naturel n.
La démonstration par récurrence (simple) consiste à :

$\star$ vérifier que la propriété est vraie pour la valeur n_0 : c'est l'initialisation de la récurrence

⋆ puis vérifier que si la propriété est vraie pour un certain rang n (fixé quelconque), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
Autrement dit, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque (la propriété est dite héréditaire).

Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Les conseils du prof :
⋆ Lorsqu'une propriété est vraie pour tout entier naturel ou pour tout entier au-delà d'un entier donné, le raisonnement par récurrence est l'un des outils à envisager systématiquement pour sa démonstration.

⋆ Même si le principe est simple à comprendre il faut prendre garde aux erreurs dans la rédaction. Il est important de bien désigner la propriété que nous avons à prouver, de bien mettre en évidence qu'au moment de l'hérédité notre entier est fixé (et de ne pas dire que l'on suppose la propriété vraie pour tout n) et de bien faire apparaître l'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

La récurrence double

La démonstration par récurrence double consiste à :

⋆ vérifier que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs

⋆ puis vérifier que si la propriété est vraie pour les rangs n et $n+1$ (fixés quelconques), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+2$.
Autrement dit, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$ pour n entier fixé quelconque.

Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le conseil du prof :
On pourra plutôt penser à une récurrence double plutôt qu'à une récurrence simple lorsqu'il y a un lien entre les indices n, $n+1$ et $n+2$.

La récurrence forte

La démonstration par récurrence forte consiste à :

⋆ vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang n_0

⋆ puis vérifier que si la propriété est vraie jusqu'au rang n (fixé quelconque $\geq n_0$), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$. Autrement dit, $\forall m \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \leq m \leq n$, $\mathcal{P}(m) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque.

Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement consistant à prouver la validité d'un résultat en montrant que son contraire aboutit à une absurdité.

Le raisonnement par disjonction de cas

Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on sépare l'hypothèse P de départ en différents cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas.

Ensembles

Présentation

Un ensemble est une collection d'objets, appelés ses éléments, considérés sans ordre, ni répétition possible.
« x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x appartient à E » et se note $x \in E$.

On écrit un ensemble en mettant tous ses éléments entre des accolades : $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *pour l'ensemble des entiers allant de 0 à* n.
Un ensemble sans élément est dit vide ; on le note $\emptyset$.

Inclusion

$\star$ Soit deux ensembles E et F. L'ensemble E est dit inclus dans l'ensemble F si tout élément de E est aussi élément de F ; on dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou une partie de F. On note $E \subset F$.

$\star$ L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E.
On a : $A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$.

Ainsi, pour $E = \{1, 2, 3\}$, *on a*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Opérations sur les ensembles

On considère E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E.

$\star$ Le complémentaire de A est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A ; on le note $\overline{A}$.

$\star$ La réunion des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B ; on la note $A \cup B$.

$\star$ L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B ; on la note $A \cap B$.

Propriétés sur les opérations d'ensemble

On notera A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E.

⋆ La commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
⋆ L'associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
⋆ La distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
⋆ La complémentarité : $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\overline{A}} = A$
$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
⋆ Les lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
⋆ Cas particuliers : $A \cap E = A$, $A \cup E = E$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$

Le produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.
Dans le cas où $E = F$, on pourra noter $E \times E = E^2$.

La définition se généralise naturellement à un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
On définit alors $\mathbb{R}^n$ (pour $n \geq 2$) l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles.

Le conseil du prof :
Il faudra tenir compte de l'ordre donné dans le produit cartésien ; par exemple une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ne l'est pas nécessairement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Une question ? des réponses !

Comment montrer que $P \Longrightarrow Q$?

À l'aide de la contraposée

L'utilisation de la contraposée (ou contraposition) vient souvent en application d'un résultat précédemment montré.
Sinon elle peut être employée pour ne pas affronter une question de manière directe.
Elle consiste en :

$$\textit{montrer } (P \Longrightarrow Q) \textit{ revient à montrer que } ((\textit{non } Q) \Longrightarrow (\textit{non } P))$$

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde

Là encore, on veut montrer que $P \Longrightarrow Q$ et contourner le raisonnement direct ; on suppose alors que l'on a P et aussi non Q pour finalement arriver à une contradiction.

À l'aide d'une disjonction de cas

Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on décompose la proposition P en différents cas possibles et on montre que chacun d'entre eux implique la proposition Q.

Comment montrer que $P \Longleftrightarrow Q$?

À l'aide d'équivalences successives

On peut procéder par équivalences successives mais c'est risqué ; il faut être attentif à la validité des implications réciproques à chaque étape.

À l'aide d'une double implication

On peut montrer que $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.