

Frédéric Butin

Classes
prépas
scientifiques

1^{re} et 2^e
années

ITC

Informatique tronc commun

Cours et exercices corrigés



ellipses

Sommaire

1	Tutoriel d'initiation à Python	1
1.1	Installation et premier exemple.....	1
1.1.1	Installation de Python	1
1.1.2	Premier exemple.....	2
1.1.3	Modules.....	2
1.1.4	Utilisation de fichiers	3
1.2	Types d'objets	3
1.2.1	Entiers et flottants	3
1.2.2	Variables	3
1.2.3	Nombres complexes	4
1.2.4	Booléens.....	4
1.2.5	Chaînes de caractères.....	4
1.2.6	Listes	5
1.2.7	Polynômes.....	6
1.3	Graphes de fonctions et courbes paramétrées	7
1.3.1	Le module matplotlib.....	7
1.3.2	Graphes de fonctions.....	7
1.3.3	Courbes paramétrées.....	8
1.4	Algèbre linéaire	8
1.4.1	Le module numpy	8
1.4.2	Tableaux	9
1.4.3	Tableaux contenant des coefficients aléatoires	10
1.4.4	Opérations sur les tableaux	10
1.5	Graphiques multiples, courbes implicites, 3D et animations	12
1.5.1	Superposition de graphes	12
1.5.2	Courbes implicites	12
1.5.3	Fenêtres contenant plusieurs graphiques.....	13
1.5.4	Représentations graphiques dans l'espace.....	14
1.5.5	Animations.....	15
1.6	Résolution numérique d'équations	15
1.6.1	Systèmes linéaires.....	15
1.6.2	Le module scipy	16
1.6.3	Dérivation d'une fonction.....	16
1.6.4	Equations non linéaires.....	16
1.6.5	Equations différentielles	16

1.7	Intégration numérique.....	17
1.7.1	Méthode standard.....	17
1.7.2	Méthode des trapèzes.....	18
1.8	Simulation des lois de probabilité.....	18
1.9	Calcul formel.....	19
1.9.1	Le module sympy.....	19
1.9.2	Exemples.....	19
2	Algorithmes classiques	21
2.1	Algorithmes pour les nombres et les polynômes.....	21
2.1.1	Calcul de puissances.....	21
2.1.1.1	Algorithme d'exponentiation naïve.....	22
2.1.1.2	Algorithme d'exponentiation rapide.....	22
2.1.2	Algorithme d'Euclide.....	23
2.1.2.1	Principe et implémentation.....	23
2.1.2.2	Majorant de la complexité de l'algorithme d'Euclide.....	24
2.1.2.3	Algorithme d'Euclide étendu.....	27
2.1.3	Cryptographie.....	28
2.1.3.1	Le système RSA.....	28
2.1.3.2	Construction des clés.....	28
2.1.3.3	Cryptage du message.....	29
2.1.3.4	Décryptage du message.....	30
2.1.4	Evaluation d'un polynôme en un point.....	32
2.1.4.1	Algorithme naïf.....	32
2.1.4.2	Algorithme de Horner.....	32
2.2	Algorithmes de recherche dans un tableau trié.....	33
2.2.1	Recherche séquentielle.....	33
2.2.2	Recherche dichotomique.....	34
2.3	Algorithmes de tri.....	35
2.3.1	Tri par sélection.....	35
2.3.2	Tri par insertion.....	36
2.3.3	Tri par fusion.....	38
2.3.4	Tri rapide (quick sort).....	42
2.3.5	Optimalité de certains algorithmes de tri.....	45
2.3.6	Tri utilisé par défaut en Python.....	46
2.4	Transformée de Fourier discrète.....	46
2.4.1	Définition de la transformée de Fourier discrète.....	46
2.4.2	Transformée de Fourier rapide (FFT).....	47
2.4.2.1	Principe de calcul.....	48
2.4.2.2	Algorithme de Cooley et Tukey.....	48
2.4.2.3	Complexité de l'algorithme de Cooley et Tukey.....	49
2.4.3	Transformée de Fourier discrète inverse.....	49
2.4.4	Transformée de Fourier discrète en dimension 2.....	50
2.4.5	Deux applications de la transformée de Fourier discrète.....	50
2.4.5.1	Valeurs approchées des coefficients de Fourier.....	50

2.4.5.2	Produit rapide de deux polynômes	52
2.5	Traitement d'images.....	53
2.5.1	Affichage d'une image en Python	53
2.5.2	Synthèse des couleurs	55
2.5.3	Filtres	55
2.5.4	Filtres non linéaires.....	55
2.5.5	Filtres linéaires	57
2.5.6	Utilisation de la FFT en traitement d'images.....	60
2.6	EXERCICES ET CORRIGÉS.....	61
2.6.1	Nombres et polynômes.....	61
2.6.2	Algorithmes itératifs	67
2.6.3	Algèbre linéaire	81
2.6.4	Récurtivité	86
2.6.5	Tris	101
2.6.5.1	Tris classiques.....	101
2.6.5.2	Tris "exotiques"	107
2.6.6	Transformée de Fourier.....	110
2.6.7	Traitement d'images.....	116
2.7	PROBLÈMES.....	124
3	Algorithmes : méthodes et structures	137
3.1	Algorithmique.....	137
3.1.1	Définition et structure d'un algorithme.....	137
3.1.2	Procédures en Python	138
3.1.3	Variables locales et variables globales.....	139
3.1.4	Tests	140
3.1.5	Boucles.....	140
3.1.6	Spécifications d'un programme	141
3.1.6.1	Entrée, sortie, signature et docstring	141
3.1.6.2	Préconditions, postconditions et assertions	141
3.1.6.3	Application à un exemple	142
3.1.7	Effets de bord.....	142
3.1.8	Problèmes d'optimisation et problèmes de recherche	143
3.1.9	Jeu de tests associé à un programme	143
3.2	Récurtivité	144
3.2.1	Introduction à la récursivité	144
3.2.2	Exemple prototypique de fonction récursive : la factorielle.....	144
3.2.3	La méthode "diviser pour régner".....	145
3.3	Etude d'un algorithme	145
3.3.1	Terminaison d'un algorithme	146
3.3.2	Correction d'un algorithme.....	146
3.3.3	Complexité d'un algorithme.....	146
3.3.3.1	Différentes classes de complexité.....	146
3.3.3.2	Exemple de calcul de complexité : cas d'école	147
3.3.4	Suites récurrentes utilisées en algorithmique	148
3.4	Tableaux et listes.....	150

3.4.1	Tableaux	151
3.4.2	Listes chaînées	151
3.4.3	Listes doublement chaînées.....	153
3.4.4	Tableaux dynamiques.....	154
3.5	Tables de hachage	156
3.5.1	Introduction.....	156
3.5.2	Tables à adressage direct.....	156
3.5.3	Définition d'une table de hachage	157
3.5.4	Résolution des collisions par chaînage*	158
3.5.5	Construction d'une fonction de hachage	160
3.5.6	Résolution des collisions par adressage ouvert*	161
3.5.7	Objets hachables et objets mutables	164
3.5.7.1	Définitions et conséquences.....	164
3.5.7.2	Egalité et identité	165
3.5.7.3	Copie d'un élément	166
3.6	Ensembles et dictionnaires	167
3.6.1	Ensembles	167
3.6.2	Dictionnaires.....	168
3.7	Utilisation de fichiers.....	168
3.7.1	Utilisation d'un fichier texte.....	168
3.7.1.1	Ecriture, lecture et ajout de données.....	169
3.7.1.2	Exemples.....	169
3.7.2	Utilisation d'un fichier csv	170
3.7.2.1	Définition et opérations de base.....	170
3.7.2.2	Exemple	170
3.8	Représentation des nombres dans un ordinateur	171
3.8.1	Représentation des entiers dans un ordinateur.....	171
3.8.1.1	Langage machine et langages de haut niveau	171
3.8.1.2	Représentation des entiers naturels.....	172
3.8.1.3	Représentation des entiers relatifs	172
3.8.1.4	Entiers multi-précision.....	173
3.8.2	Représentation des réels dans un ordinateur.....	174
3.8.2.1	Définitions	174
3.8.2.2	Exemple	176
3.8.2.3	Changement de base pour les nombres flottants.....	177
3.8.2.4	Approximation d'un réel.....	177
3.8.2.5	Flottants en simple précision	178
3.8.2.6	Flottants en double précision	179
3.8.2.7	Limites de précision dans le calcul avec les flottants	179
3.9	EXERCICES ET CORRIGÉS.....	182
3.9.1	Hachage.....	182
3.9.2	Représentation des nombres.....	183
3.9.2.1	Nombres entiers	183
3.9.2.2	Nombres flottants.....	186

4 Graphes	195
4.1 Graphes	195
4.1.1 Définitions	195
4.1.1.1 Graphes non orientés	195
4.1.1.2 Graphes orientés	196
4.1.2 Représentations d'un graphe : matrice et liste d'adjacence	197
4.1.3 Sous-graphes	198
4.1.4 Graphes valués	199
4.1.5 Connexité et arêtes séparatrices	199
4.1.5.1 Composantes connexes et fortement connexes	199
4.1.5.2 Arêtes séparatrices	200
4.1.6 Arbres	201
4.1.6.1 Définitions et propriétés	201
4.1.6.2 Arbres couvrants	203
4.1.6.3 Représentation des arbres	204
4.2 Parcours dans les graphes	205
4.2.1 Piles et files	206
4.2.1.1 Piles	206
4.2.1.2 Files	207
4.2.2 Parcours en largeur	208
4.2.2.1 Définitions et algorithmes	209
4.2.2.2 Propriétés du parcours en largeur	211
4.2.2.3 Applications du parcours en largeur	212
4.2.3 Parcours en profondeur	214
4.2.3.1 Définitions et algorithmes	214
4.2.3.2 Propriétés du parcours en profondeur	218
4.2.3.3 Applications du parcours en profondeur	219
4.3 Tas et files de priorité*	221
4.3.1 Structure de tas (binaire)	221
4.3.2 Tas max et opérations	223
4.3.2.1 Première opération — Modifier un tas max	223
4.3.2.2 Deuxième opération — Ordonner un tableau en un tas max	224
4.3.2.3 Tas max pour les files de priorité	225
4.3.3 Tri par tas	225
4.3.4 Tas min et opérations	226
4.3.5 Files de priorité max	227
4.3.5.1 Première opération — Rechercher un élément de clé maximale	228
4.3.5.2 Deuxième opération — Extraire un élément de clé maximale	228
4.3.5.3 Troisième opération — Augmenter la clé d'un élément	228
4.3.5.4 Quatrième opération — Insérer un élément	229
4.3.6 Files de priorité min	230

4.4	Plus courts chemins	231
4.4.1	Définitions et propriétés	231
4.4.2	Algorithme de plus courts chemins par tri topologique*	234
4.4.3	Algorithme de Bellman-Ford*	235
4.4.4	Algorithme de Dijkstra	237
4.4.4.1	Implémentation naïve de l'algorithme	238
4.4.4.2	Implémentation utilisant une file de priorité*	240
4.4.5	Algorithme A étoile	241
4.5	EXERCICES ET CORRIGÉS	243
4.5.1	Graphes	243
4.5.2	Arbres	250
4.5.3	Piles et files	256
4.5.4	Parcours dans un graphe	258
4.5.5	Tas	271
4.5.6	Plus courts chemins dans un graphe	273
4.6	PROBLÈMES	277
5	Algorithmes gloutons	287
5.1	Heuristique gloutonne	287
5.1.1	Hypergraphes et algorithme glouton	287
5.1.2	Méthode	288
5.2	Matroïdes*	289
5.3	Ordonnancement de tâches avec pénalités	293
5.4	Algorithmes de Kruskal et de Prim*	295
5.4.1	Matroïdes graphiques	295
5.4.2	Algorithme de Kruskal	296
5.4.3	Algorithme de Prim	298
5.5	Codage de Huffman*	301
5.5.1	Codage préfixe	301
5.5.2	Propriétés du codage de Huffman	303
5.5.3	Implémentation du codage de Huffman	305
5.5.4	Implémentation du décodage	306
5.6	Problème du sac à dos : version fractionnaire	307
5.6.1	Présentation du problème	307
5.6.2	Résolution	307
5.7	EXERCICES ET CORRIGÉS	308
5.7.1	Matroïdes et algorithme glouton	308
5.7.2	Ordonnancement de tâches avec pénalités	311
5.7.3	Algorithmes de Kruskal et de Prim	312
5.7.4	Rendu de monnaie	315
5.7.5	Codage de Huffman	317
5.7.6	Problème du sac à dos : version fractionnaire	321
6	Bases de données	323
6.1	Introduction	323
6.1.1	Présentation des systèmes de gestion de bases de données	323

6.1.2	Architecture trois tiers	323
6.1.3	Quatre étapes	324
6.2	Modèle conceptuel de données	324
6.2.1	Présentation du modèle	324
6.2.2	Exemple de référence	325
6.2.3	Entités et attributs	326
6.2.4	Types, occurrences et identifiants	326
6.2.5	Associations	327
6.2.5.1	Associations 1 – 1	328
6.2.5.2	Associations 1 – *	329
6.2.5.3	Associations	329
6.2.6	Entités faibles	329
6.2.7	Contraintes d'intégrité	330
6.2.8	Méthode de création d'un modèle conceptuel de données	330
6.3	Modèle logique de données	331
6.3.1	Relations	331
6.3.2	Clés primaires et clés étrangères	331
6.3.3	Contraintes référentielles et graphe des clés étrangères	333
6.3.4	Passage d'un modèle conceptuel à un modèle logique	333
6.4	Implémentation et peuplement	336
6.4.1	Création de la base de données	337
6.4.2	Peuplement de la base de données	338
6.5	Interrogation d'une base de données	339
6.5.1	Projection	339
6.5.2	Sélection	340
6.5.3	Produit cartésien	341
6.5.4	Réunion	342
6.5.5	Intersection	342
6.5.6	Différence	343
6.5.7	Renommage	343
6.5.8	Jointure	343
6.5.9	Auto-jointure	344
6.5.10	Schémas standards pour les opérateurs	345
6.5.11	Division cartésienne	345
6.5.12	Fonctions d'agrégation	346
6.5.13	SQL et Python	347
6.6	EXERCICES ET CORRIGÉS	348
6.7	PROBLÈMES	358
7	Programmation dynamique	373
7.1	Principes de la programmation dynamique	373
7.1.1	Définitions	373
7.1.2	Méthode	374
7.2	Découpage d'une barre métallique	374
7.2.1	Etape 1. Structure d'une solution optimale	375
7.2.2	Etape 2. Solution récursive	375

7.2.3	Etape 3a. Calcul récursif du prix maximal : résolution du problème d'optimisation.....	376
7.2.4	Etape 3b. Calcul itératif du prix maximal : résolution du problème d'optimisation.....	377
7.2.5	Etape 4. Construction d'une solution optimale associée au prix maximal : résolution du problème de recherche.....	377
7.3	Algorithme de Levenshtein.....	378
7.3.1	Etape 1. Structure d'une solution optimale.....	379
7.3.2	Etape 2. Solution récursive.....	379
7.3.3	Etape 3b. Calcul itératif de la distance minimale : résolution du problème d'optimisation.....	380
7.3.4	Etape 4. Construction d'une solution optimale associée à la distance minimale : résolution du problème de recherche.....	381
7.4	Problème du sac à dos : version entière	381
7.4.1	Présentation du problème et résolution naïve.....	381
7.4.2	Etape 1. Structure d'une solution optimale	382
7.4.3	Etapes 2, 3 et 4. Résolution des problèmes d'optimisation et de recherche.....	382
7.5	Multipliations matricielles enchaînées.....	383
7.5.1	Etape 1. Structure d'une solution optimale	384
7.5.2	Etape 2. Solution récursive.....	384
7.5.3	Etape 3a. Calcul récursif du coût minimal : résolution du problème d'optimisation.....	385
7.5.4	Etape 3b. Calcul itératif du coût minimal : résolution du problème d'optimisation.....	386
7.5.5	Etape 4. Construction d'une solution optimale associée au coût minimal : résolution du problème de recherche.....	386
7.6	Plus longue sous-suite commune.....	387
7.6.1	Etape 1. Structure d'une solution optimale	387
7.6.2	Etape 2. Solution récursive.....	389
7.6.3	Etape 3b. Calcul itératif de la longueur maximale : résolution du problème d'optimisation.....	389
7.6.4	Etape 4. Construction d'une solution optimale associée à la longueur maximale : résolution du problème de recherche.....	390
7.7	Algorithme de Floyd-Warshall.....	390
7.7.1	Etapes 1 et 2. Structure d'une solution optimale	390
7.7.2	Etape 3b. Calcul itératif de la valeur maximale : résolution du problème d'optimisation.....	391
7.7.3	Etape 4. Construction d'une solution optimale associée à la valeur maximale : résolution du problème de recherche.....	392
7.8	Comparaison de trois méthodes.....	394
7.8.1	Comparaison avec la méthode "diviser pour régner".....	394
7.8.2	Comparaison avec la méthode gloutonne.....	395
7.8.3	Tableau récapitulatif.....	395
7.9	EXERCICES ET CORRIGÉS.....	396

7.9.1	Algorithme de Levenshtein.....	397
7.9.2	Problème du sac à dos : version entière	399
7.9.3	Multiplifications matricielles enchaînées	400
7.9.4	Plus longue sous-suite commune	402
7.9.5	Algorithme de Floyd-Warshall.....	404
8	Intelligence artificielle et étude des jeux	407
8.1	Principes de l'intelligence artificielle	407
8.1.1	Définitions et exemples	407
8.1.2	Deux principaux types d'apprentissage statistique	408
8.1.3	Utilisation de Python	409
8.2	Apprentissage supervisé	410
8.2.1	Introduction.....	410
8.2.2	Utilisation de Python	410
8.2.2.1	Exemple de classification.....	410
8.2.2.2	Exemple de régression	412
8.2.3	Evaluation d'un modèle	412
8.2.3.1	Fonction de perte et risque empirique	412
8.2.3.2	Cas d'un modèle de classification	412
8.2.3.3	Cas d'un modèle de régression	414
8.2.4	Algorithme des k plus proches voisins.....	414
8.2.4.1	Introduction	414
8.2.4.2	Classification.....	415
8.2.4.3	Régression.....	417
8.2.5	Classification naïve bayésienne*	419
8.2.5.1	Introduction	419
8.2.5.2	Principe et algorithme	419
8.2.6	Régressions linéaires*.....	421
8.2.6.1	Cas d'un problème de régression	421
8.2.6.2	Fonctions logit et logistique	423
8.2.6.3	Cas d'un problème de classification binaire.....	424
8.2.7	Initiation aux réseaux de neurones artificiels*	428
8.2.7.1	Introduction	428
8.2.7.2	Perceptron.....	428
8.2.7.3	Perceptron multiclasse	430
8.2.7.4	Perceptron multicouche	431
8.2.7.5	Apprentissage d'un réseau de neurones	433
8.3	Apprentissage non supervisé	437
8.3.1	Algorithme des k moyennes.....	437
8.3.1.1	Introduction	437
8.3.1.2	L'algorithme des k moyennes.....	438
8.3.1.3	Implémentation en Python.....	439
8.4	Etude des jeux.....	443
8.4.1	Jeux à deux joueurs	443
8.4.1.1	Introduction et définitions.....	443

8.4.1.2	Exemple du jeu de Nim	444
8.4.1.3	Exemple du jeu de morpion	446
8.4.1.4	Arbre d'un jeu	446
8.4.2	Jeux d'accessibilité	447
8.4.3	Construction d'une stratégie gagnante	449
8.4.4	Algorithme du minimax	450
8.4.4.1	Principe et algorithme	450
8.4.4.2	Algorithme du minimax avec une heuristique	452
8.5	EXERCICES ET CORRIGÉS	453
8.5.1	Intelligence artificielle — Apprentissage supervisé	453
8.5.2	Intelligence artificielle — Apprentissage non supervisé	462
8.5.3	Etude des jeux — Graphes et stratégies	466
8.5.4	Etude des jeux — Algorithme du minimax	470
8.6	PROBLÈMES	476
A Complexité d'algorithmes		485
Bibliographie		487
Index		489