Alexandre Chiolo

Agrégation interne de mathématiques

41 thèmes pour la deuxième épreuve orale

Agrégation interne Oral

ellipses

Thème 301

Exercices sur les groupes

On fera le choix de proposer une liste d'exercices ordonnée selon le niveau de difficulté, en prenant toutefois soin de grouper ceux liés à une même notion.

....

Exercice 1 : **[MON-MP], exemple, page 3**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,;\, \det(M) = 1\}$.
Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour la multiplication.

Un premier exercice consistant à établir la structure de sous-groupe d'un ensemble, en tant qu'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes. Ces éléments sont explicitement mentionnés dans le programme de classe préparatoire MP. En particulier, l'application $M \mapsto \det(M)$ y est citée en tant qu'exemple d'un tel morphisme.
Les étapes de résolution étant relativement succinctes et élémentaires, on pourra y discerner une opportunité de se présenter devant le jury avec une certaine confiance, dans le cas où ces dernières seraient exigées durant le temps d'échange.

....

Exercice 2 : **[AGR-INT], session 2012, épreuve 1, question 1**

1. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$; montrer que $\det(M) = \pm 1$.

2. Soit M une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que $\det(M) = \pm 1$. Montrer que M appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Solution :

1. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ donc $\det(M) \neq 0$.
   De plus, M est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc $\det(M) \in \mathbb{Z}^*$ (on pourrait le démontrer à l'aide d'un développement par rapport à une ligne/colonne et un raisonnement par récurrence sur n). On en déduit que $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}^*$ (M^{-1} étant également une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$).
   On a $1 = \det(I_n) = \det(M.M^{-1}) = \det(M) \times \det(M^{-1})$, soit
   $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.
   Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}^*$ étant 1 et -1, on en déduit que
   $\det(M) = \pm 1$.

2. Si M est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que $\det(M) = \pm 1$, alors $\det(M) \neq 0$ et ainsi $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   On a $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t com(A) = \pm {}^t com(A)$.
   $com(M)$ étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (puisqu'ils sont les déterminants de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$), ${}^t com(M)$ et $M^{-1} = \pm {}^t com(M)$ le sont également.
   Finalement M est inversible avec $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

3. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus :
   • $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$;
   • Soit $(M, N) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}))^2$. D'après la question **1**, on a $\det(M) = \pm 1$ et $\det(N) = \pm 1$.
   On en déduit que $\det(N^{-1}) = \pm 1$ et
   $\det(M.N^{-1}) = \det(M) \times \det(N^{-1}) = \pm 1$.
   $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ donc $N^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. La matrice $M.N^{-1}$ est donc à coefficients entiers, en tant que produit de deux matrices à coefficients entiers.
   Finalement, $\det(M.N^{-1}) = \pm 1$ et $M.N^{-1}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. D'où, d'après la question **2**, $M.N^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
   En conclusion, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est donc bien un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

⊕ On trouvera dans cet exercice une construction progressive des éléments définissant un sous-groupe. Initialement, la question 2 faisait figurer l'indication suivante : *on pourra considérer la transposée de la comatrice de* M. Peut-être n'est-il pas nécessaire de la conserver dans le cas présent, afin de produire un exercice ayant un minimum de consistance.
Les notions de déterminant, matrice inversible et leurs propriétés/applications sont largement abordées ici et peuvent donc légitimement permettre de réutiliser cet exercice pour d'autres thèmes.

Exercice 3 : **[FRE-MPSI], exercice 4.1, page 57**

1. Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble
$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Dans la suite, on considère un sous-groupe G de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.
2. Justifier l'existence du minimum n de l'ensemble
$E = \{m \in G \mid m > 0\}$.
3. Montrer que l'on a l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset G$.
4. Montrer que l'on a l'égalité $n\mathbb{Z} = G$.

Un résultat incontournable caractérisant les sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Il est fréquent de rencontrer une formulation quelque peu brutale de ce problème, sans questions intermédiaires. Les étapes développées permettent ici au lecteur de davantage structurer le raisonnement à mener et ainsi apprécier ce cheminement plus pédagogique et progressif, qui lui permet en outre de se démarquer de ce qui pourrait excessivement s'apparenter à un résultat de cours.
Les nombreux commentaires qui accompagnent la résolution présentée dans l'ouvrage référencé permettront au lecteur de lire et assimiler les étapes de résolution avec une certaine fluidité.

. . . .

Exercice 4 : **[FRE-MP], exercice 1.10, page 22**

Soient p et q deux entiers.
Montrer que le groupe produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

Une application du théorème chinois qui permet de faire intervenir une autre caractéristique potentielle d'un groupe, la cyclicité. Suffisamment pertinent pour être présenté, sans aucun doute pas assez long pour que la résolution soit exposée au jury en l'état. Afin d'étoffer quelque peu l'énoncé et construire un exercice plus consistant, on peut envisager l'ajout d'une question préliminaire consistant à démontrer le théorème chinois :

Soient p et q deux entiers.

1. On suppose dans cette question que p et q sont premiers entre eux. Démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

2. Montrer que le groupe produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

On pourra pour cela introduire, en posant, pour $x \in \mathbb{Z}$, $cl_p(x)$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $cl_q(x)$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $cl_{pq}(x)$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ cl_{pq}(x) & \mapsto & (cl_p(x), cl_q(x)) \end{array}, \text{ où } x \in \mathbb{Z}.$$

Il s'agit alors de montrer que f est un isomorphisme d'anneaux.
Il est également intéressant de constater que la question 2 fournit une démonstration, par contraposition, de la réciproque du théorème chinois.

Afin d'illustrer la propriété établie, dans le cas où p et q ne sont pas premiers entre eux, on peut citer l'exemple classique du groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, non isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. En effet, mis à part $(\overline{0},\overline{0})$, tous les éléments de ce groupe sont d'ordre 2, tandis qu'il existe dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ des éléments d'ordre 4.

. . . .

Exercice 5 : [SKA-AL], exercice 1.3, page 12

Soit G un groupe commutatif fini.

1. Soient $a, b \in G$. On note k_a et k_b leurs ordres respectifs. On suppose que k_a et k_b sont premiers entre eux. Démontrer que l'ordre de l'élément ab est k_ak_b.

2. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\{k \in \mathbb{Z}\,;\, \forall x \in G\,;\, x^k = 1\} = n\mathbb{Z}.$$

   Démontrer que n divise le cardinal de G.
   Le nombre n s'appelle l'*exposant* de G.

3. (a) Écrivons $n = \prod p_j^{m_j}$ la décomposition de n en nombres premiers distincts. Démontrer que pour tout j, il existe $x_j \in G$ d'ordre $p_j^{m_j}$.
   (b) En déduire qu'il existe $x \in G$ d'ordre n.

➕ Double travail sur l'existence autour de l'exposant d'un groupe (*le plus petit entier strictement positif* n*, s'il existe, tel que pour tout* $x \in G$*,* $x^n = 1$) abélien dans le cas présent. Tandis que la question 2 permet de lever, dans le contexte étudié, le doute exprimé dans sa définition, la dernière établit quant à elle l'existence de ce dernier en tant qu'ordre d'un élément du groupe. La résolution proposée fait la part belle à l'arithmétique et peut donc aisément être réinvestie pour les thèmes correspondants. Le choix de la présentation de cet exercice au jury, dans le cas où la récurrence finale serait développée, est envisageable mais nécessite de l'entraînement, dans la mesure où l'on y trouve des notations assez techniques, avec lesquelles il faut se familiariser.

. . . .

Exercice 6 **: [FRE-MPSI], exercice 4.2, page 59**

Soit G un groupe de neutre e dont tout élément x vérifie $x^2 = e$ (un tel groupe est dit d'*exposant* 2).

1. Démontrer que G est commutatif.
2. Soient H un sous-groupe strict de G et $u \in G \setminus H$. On note $uH = \{ux, x \in H\}$.
   Démontrer que uH a même cardinal que H et $H \cap uH = \varnothing$. uH est-il un sous-groupe de G ?
3. On pose $K = H \cup uH$. Démontrer que K est un sous-groupe de G.
4. On suppose de plus que G est fini. Démontrer qu'il existe une suite croissante de sous-groupes $\{e\} = H_0 \subset \ldots \subset H_p = G$ avec $\mathrm{Card}(H_k)=2^k$.
   Ainsi, en particulier, le cardinal de G est une puissance de 2.

➕ Une étude d'un cas particulier de l'exercice précédent (cas où l'exposant du groupe est égal à 2). Deux points de vue peuvent par conséquent s'opposer en le sélectionnant : on peut d'un côté entrevoir une certaine cohérence à développer cette étude en lien avec la précédente et se sentir plutôt à l'aise pour établir une transition rigoureuse et un lien pédagogique indéniable. D'un autre côté, on peut questionner la pertinence de consacrer deux exercices à une même notion. Une manière de relativiser le second point est de constater que les résolutions de ces deux exercices se démarquent nettement par leur contenu. L'exercice 5 fait en effet intervenir essentiellement l'arithmétique, tandis que le second se concentre sur la notion de groupe. Il y a donc un choix stratégique à faire, l'important est d'être capable de le justifier. Dans le cas où l'on préfèrerait se restreindre à l'un des deux exercices et ne prendre aucun risque, là encore il faudra bien peser le pour et le contre. Si la place de l'exercice 6 paraît plus légitime pour ce thème, par sa manière de traiter la structure de groupe, l'exercice 5 peut être réinvesti pour les autres thèmes liés à l'arithmétique...

. . . .

Exercice 7 **:[AGR-INT], session 2020, épreuve 1, questions 10, 11**

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On désigne par

$$\Delta = \{I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}.$$

1. Vérifier que $A^3B = BA$, et montrer que Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. On définit $\Gamma = \langle A \rangle$ le sous-groupe de Δ engendré par A et $R = \langle B \rangle$ le sous-groupe de Δ engendré par B.
   (a) Montrer que Δ/Γ est un groupe à deux éléments.
   (b) En déduire que Δ/Γ est isomorphe à R.
3. Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes Δ et $\Gamma \times R$?

Les questions 10 et 11 de l'épreuve d'agrégation interne ont ici été groupées (question 10 intégrée à la deuxième partie de la 11) de manière à former un exercice indépendant. L'intérêt de ce dernier repose principalement sur l'introduction de l'ensemble Γ, qui permet d'aborder un certain nombre de caractéristiques dont peut(vent) disposer un(des) groupe(s)/sous-groupe(s) : distingué, cyclique, abélien, isomorphes. Le caractère calculatoire de la première question n'incite probablement pas, à juste titre, à présenter une résolution détaillée de cet exercice. Toutefois, dans le cas où cet extrait de l'épreuve de 2020 ferait partie de la liste exposée au jury, il faut s'attendre à des demandes ciblées sur les questions 2 et 3, et en conséquence maîtriser les tenants et les aboutissants des multiples propriétés des groupes/sous-groupes exposées. Le candidat trouvera à cet effet dans le rapport détaillé du jury toutes les indications et éléments de réponse nécessaires à l'assimilation de la démarche mise en jeu.

. . . .

Exercice 8 : **[SKA-AL], exercice 10.13, page 353**

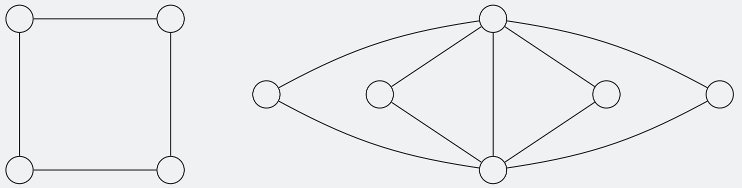
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, orthonormé direct. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit ρ la rotation de centre O d'angle $2\pi/n$, et soit σ la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.
On pose $P_0 = O + \vec{u}$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P_k = \rho^k(P_0)$. On appelle *groupe diédral* et l'on note D_n le groupe des isométries du plan qui envoient le polygone régulier à n côtés $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$ sur lui-même.

1. Démontrer que les isométries directes forment dans D_n un sous-groupe cyclique, engendré par ρ. Quel est l'ordre de ce sous-groupe ?
2. Démontrer que tout élément de D_n est de la forme ρ^k ou $\rho^k \circ \sigma$, pour un $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Quel est l'ordre de D_n ?
3. Caractériser géométriquement les éléments de D_n (distinguer deux cas, selon la parité de n). Expliciter géométriquement le produit de deux éléments quelconques de D_n.

Difficile de présenter une étude de ce thème sans mettre en exergue le lien naturel qui existe entre cette structure et la géométrie, à travers notamment le groupe des isométries qui conservent un polygone, un solide. Il existe de nombreux exercices sur ce thème : groupe des isométries qui conservent un cube, un triangle équilatéral direct, etc. L'exercice sélectionné, relativement théorique, concerne le groupe des isométries conservant un polygone régulier convexe à n côtés, diédral d'ordre $2n$. Sa résolution, détaillée et illustrée, permettra au lecteur de le considérer comme une valeur sûre, suffisamment pertinente dans le cadre du thème étudié et fournie pour être présentée au jury dans le temps imparti de 15 minutes. Il n'est cependant pas exclu de voir ensuite le jury approfondir ce sujet et se glisser dans les méandres de la géométrie durant le temps d'échange...

Exercice 8' : **[AGR-INT], session 2019, épreuve 1, question 1**

On considère les deux graphes connexes dessinés ci-dessous.



Les groupes des automorphismes de ces deux graphes sont-ils isomorphes ? (Indication : ces deux groupes sont d'ordre 8).

Rappelons tout d'abord qu'un automorphisme est un morphisme bijectif d'un ensemble sur lui-même.
Cet exercice constitue une alternative intéressante pour les candidats qui ne se sentiraient pas suffisamment à l'aise pour présenter l'exercice précédent. Un groupe diédral y est en effet employé. La résolution est assez succincte et accessible pour être envisagée sereinement en cas de demande du jury en ce sens. Dans l'esprit d'une fiche d'exercices destinée à des étudiants, on peut éventuellement choisir de conserver l'indication donnée dans l'épreuve d'agrégation.