

Lalaonirina Rakotomanana Ravelonarivo

Licence  
Master

# Introduction à la mécanique des milieux continus déformables

Cours et exercices corrigés



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>iii</b>
<b>1 Cinématique</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités	1
1.2 Cinématique du point	7
1.2.1 Référentiel, repère, mouvement	7
1.2.2 Système de coordonnées, base locale	11
1.2.3 Vitesse instantanée d'un point matériel	13
1.2.4 Accélération instantanée d'un point matériel	14
1.3 Cinématique du solide rigide	15
1.3.1 Champ de vitesse dans un solide rigide	15
1.3.2 Rotation d'un solide (approche lagrangienne)	17
1.3.3 Angles d'Euler 3-1-3	21
1.4 Cinématique du milieu continu	24
1.4.1 Transformation d'un milieu continu	24
1.4.2 Vitesse et accélération dans un milieu continu	27
1.4.3 Notions sur les descriptions lagrangienne et eulérienne	29
1.4.4 Transformation homogène	32
1.5 Exercices	34
1.5.1 Transformation homogène	34
1.5.2 Mouvement admissible	35
1.5.3 Descriptions lagrangienne, eulérienne : déplacement	36
1.5.4 Descriptions lagrangienne, eulérienne : vitesse	37
1.5.5 Descriptions lagrangienne, eulérienne : vitesse, accélération	38
1.5.6 Descriptions lagrangienne, eulérienne : vitesse, accélération	38
1.5.7 Analyse cinématique du glissement pur	39
1.5.8 Trajectoires	40
1.5.9 Trajectoires en polaires	41
1.5.10 Lignes de courant	42
1.5.11 Lignes de courant et trajectoires	43

<b>2</b>	<b>Opérateurs différentiels</b>	<b>45</b>
2.1	Opérateurs en coordonnées cartésiennes	46
2.1.1.	Gradient	46
2.1.2.	Divergence	48
2.1.3.	Rotationnel	51
2.1.4.	Laplacien	52
2.2	Opérateurs en coordonnées cylindriques	54
2.2.1.	Gradients	55
2.2.2.	Divergence	57
2.2.3.	Rotationnel d'un vecteur	58
2.2.4.	Laplacien	59
2.3	Opérateurs en coordonnées sphériques	60
2.3.1.	Gradient	60
2.3.2.	Divergence	61
2.3.3.	Rotationnel	63
2.3.4.	Laplacien	63
2.4	Intégration sur les milieux continus	65
2.4.1.	Théorème de la divergence	65
2.4.2.	Localisation : Lemme de Haar	67
2.5	Exercices	69
2.5.1.	Gradient d'un scalaire	69
2.5.2.	Propriétés	69
2.5.3.	Gradient et divergence de vecteur	70
2.5.4.	Gradient et divergence en coordonnées cylindriques	71
2.5.5.	Laplacien	72
2.5.6.	Hessien et laplacien	73
2.5.7.	Potentialité des champs et flux	73
2.5.8.	Champ de vecteur harmonique	74
2.5.9.	Identités de Green	76
<b>3</b>	<b>Déformation d'un milieu continu</b>	<b>79</b>
3.1	Généralités sur les déformations	79
3.1.1.	Bref historique	79
3.1.2.	Observations expérimentales	80
3.2	Gradient de la transformation	83
3.3	Tenseurs de déformation	88
3.3.1.	Tenseurs de Cauchy-Green et de Green-Lagrange	88
3.3.2.	Composition d'une transformation et d'une rotation	93
3.3.3.	Rappels sur la fonction Trace	94
3.3.4.	Elongations, déformations principales	96

3.4	Elongation, changement d'aire et de volume . . . . .	100
3.4.1.	Transformations des éléments matériels . . . . .	101
3.4.2.	Cinématique des éléments matériels . . . . .	104
3.4.3.	Fonctions d'élongation et de changement d'aire . . . . .	107
3.5	Déformation infinitésimale . . . . .	110
3.5.1.	Déformation de Cauchy . . . . .	110
3.5.2.	Déformations principales . . . . .	112
3.5.3.	Compatibilité de la déformation infinitésimale . . . . .	114
3.6	Compatibilité en transformations finies . . . . .	117
3.6.1.	Torsion . . . . .	117
3.6.2.	Courbure . . . . .	118
3.7	Exercices . . . . .	120
3.7.1.	Transformation finie homogène . . . . .	120
3.7.2.	Transformation finie non homogène . . . . .	123
3.7.3.	Transformation finie homogène . . . . .	125
3.7.4.	Elongation . . . . .	127
3.7.5.	Elongation simple isochore . . . . .	128
3.7.6.	Coordonnées cylindriques . . . . .	129
3.7.7.	Exemple d'écoulements (Couette, Poiseuille) . . . . .	130
3.7.8.	Invariance de la trace $\text{Tr}C$ . . . . .	132
3.7.9.	Elongations principales . . . . .	133
3.7.10.	Transformation finie et déformation infinitésimale . . . . .	135
3.7.11.	Déformations principales . . . . .	136
3.7.12.	Rotation finie et petites déformations . . . . .	137
3.7.13.	Déformations principales . . . . .	139
3.7.14.	Déformation d'un milieu continu fibreux . . . . .	141
3.7.15.	Bases des mesures expérimentales . . . . .	144
3.7.16.	Résolution d'un champ harmonique . . . . .	146
3.7.17.	Cinématique : base convectée et sa base réciproque . . . . .	148
3.7.18.	Formule cinématique d'un élément de volume . . . . .	150
3.7.19.	Formule cinématique d'un élément de surface . . . . .	151
3.7.20.	Torsions linéaire et non linéaire . . . . .	153
3.7.21.	Tenseur vitesse de rotation et objectivité . . . . .	161
<b>4</b>	<b>Lois de conservation</b> . . . . .	<b>163</b>
4.1	Introduction et généralités . . . . .	163
4.1.1.	Bref historique . . . . .	163
4.1.2.	Lois de conservation . . . . .	164
4.2	Masse . . . . .	164
4.2.1.	Formulation intégrale . . . . .	164

4.2.2.	Formulation locale.....	165
4.3	Efforts internes et contrainte.....	166
4.3.1.	Notion de forces.....	166
4.3.2.	Efforts internes.....	167
4.4	Quantité de mouvement et moment cinétique.....	170
4.4.1.	Formulations intégrales (Euler).....	171
4.4.2.	Théorème de Cauchy.....	172
4.4.3.	Equations locales du mouvement.....	174
4.5	Théorème de l'énergie cinétique.....	179
4.5.1.	Système masse-ressort-amortisseur.....	179
4.5.2.	Système continu.....	180
4.6	Contraintes principales, analyse.....	182
4.6.1.	Pression hydrostatique, contrainte déviatorique.....	183
4.6.2.	Invariants et contraintes principales.....	183
4.7	Equations du mouvement en TF.....	188
4.7.1.	Contrainte nominale.....	189
4.7.2.	Contrainte matérielle.....	191
4.7.3.	Equations dynamiques des milieux continus.....	194
4.8	Opérateurs différentiels en TF.....	194
4.8.1.	Gradient matériel d'un champ de vecteur.....	194
4.8.2.	Gradient en coordonnées cylindriques.....	195
4.8.3.	Divergence matérielle d'un tenseur mixte.....	197
4.8.4.	Divergence en coordonnées cylindriques.....	198
4.8.5.	Gradient en coordonnées sphériques.....	199
4.9	Exercices.....	202
4.9.1.	Conservation de la masse dans la configuration actuelle.....	202
4.9.2.	Réciprocité des contraintes.....	203
4.9.3.	Cisaillement maximal 1D.....	204
4.9.4.	Cisaillement maximal 2D.....	205
4.9.5.	Contraintes principales.....	206
4.9.6.	Contraintes principales.....	208
4.9.7.	Equilibre d'un bloc de milieu continu.....	210
4.9.8.	Résolution de contrainte unidimensionnelle.....	212
4.9.9.	Equilibre d'une enveloppe sphérique.....	215
4.9.10.	Théorème de l'énergie cinétique en milieu continu 1D.....	216
4.9.11.	Puissance de déformation de l'élongation simple.....	218
4.9.12.	Fluide parfait : contraintes de Piola-Kirchhoff.....	221
4.9.13.	Contrainte de Kirchhoff : différentes composantes.....	221

<b>5</b>	<b>Elasticité linéaire</b>	<b>223</b>
5.1	Introduction et généralités . . . . .	223
5.1.1.	Bref historique . . . . .	223
5.1.2.	Lois de comportement . . . . .	224
5.2	Critère de résistance des matériaux . . . . .	225
5.2.1.	Critère de cisaillement maximal . . . . .	226
5.2.2.	Critère de von Mises . . . . .	228
5.2.3.	Critère de Hill : cas du transverse isotrope . . . . .	229
5.3	Loi de comportement élastique . . . . .	231
5.3.1.	Notion d'hyperélasticité . . . . .	232
5.3.2.	Loi de Hooke . . . . .	233
5.3.3.	Constantes élastiques des milieux isotropes . . . . .	237
5.3.4.	Milieu continu incompressible . . . . .	240
5.4	Equations de Navier . . . . .	241
5.4.1.	Equations de Navier en compressible . . . . .	241
5.4.2.	Equation de Navier en incompressible . . . . .	244
5.5	Méthodes de résolution en contraintes . . . . .	246
5.5.1.	Equations de Beltrami-Mitchell . . . . .	246
5.5.2.	Notions sur la fonction d'Airy . . . . .	248
5.6	Exercices . . . . .	253
5.6.1.	Loi de Hooke en élasticité plane . . . . .	253
5.6.2.	Directions principales de $\epsilon$ et $\sigma$ . . . . .	255
5.6.3.	Essai oedométrique . . . . .	256
5.6.4.	Essai de compression d'un tube cylindrique . . . . .	259
5.6.5.	Etat de contrainte auto-équilibré . . . . .	262
5.6.6.	Problème de manchon . . . . .	266
5.6.7.	Autofrettage d'un tube d'acier . . . . .	268
5.6.8.	Tube incompressible . . . . .	272
5.6.9.	Exercice et problème . . . . .	275
5.6.10.	Une coque sphérique épaisse sous pression . . . . .	283
5.6.11.	Fonction d'Airy axisymétrique . . . . .	284
5.6.12.	Méthode d'Airy : Poutre courbe circulaire . . . . .	286
5.6.13.	Fonction d'Airy : solutions générales en polaires . . . . .	288
5.6.14.	Poutre en quart de cercle . . . . .	289
<b>6</b>	<b>Problèmes de St-Venant : poutres</b>	<b>293</b>
6.1	Introduction et généralités . . . . .	293
6.2	Poutres sans gauchissement de section . . . . .	296
6.2.1.	Poutres : principales hypothèses . . . . .	296
6.2.2.	Champ de déplacement . . . . .	297

6.2.3.	Champ de déformation de Cauchy . . . . .	298
6.3	Equations d'équilibre des poutres droites . . . . .	299
6.3.1.	Hypothèse de St-Venant et champ de contrainte . . . . .	299
6.3.2.	Force et moment résultants dans une section. . . . .	300
6.3.3.	Equations d'équilibre de la poutre. . . . .	301
6.4	Poutres en flexion d'Euler-Bernoulli. . . . .	304
6.5	Poutres avec gauchissement de section . . . . .	307
6.5.1.	Hypothèse de St-Venant. . . . .	307
6.5.2.	Poutre en traction/compression . . . . .	308
6.5.3.	Poutre en torsion . . . . .	311
6.5.4.	Flexion pure et traction/compression . . . . .	318
6.6	Exercices . . . . .	321
6.6.1.	Forces et moments internes dans une poutre. . . . .	321
6.6.2.	Poutre en flexion soumise à son poids propre . . . . .	324
6.6.3.	Torsion d'une poutre de section elliptique . . . . .	326
6.6.4.	Torsion d'une poutre de section rectangulaire . . . . .	328
<b>7</b>	<b>Ondes élastiques</b> . . . . .	<b>331</b>
7.1	Introduction : généralités . . . . .	331
7.2	Ondes dans un milieu élastique isotrope. . . . .	333
7.2.1.	Rappel sur les milieux continus élastiques isotropes . . . . .	333
7.2.2.	Existence des ondes longitudinales et transversales. . . . .	334
7.2.3.	Ondes rotationnelles et irrotationnelles. . . . .	336
7.2.4.	Exemples d'ondes élastiques isotropes . . . . .	341
7.2.5.	Equation de Pochhammer. . . . .	348
7.3	Ondes élastiques anisotropes. . . . .	354
7.3.1.	Milieux continus élastiques anisotropes . . . . .	355
7.3.2.	Milieux continus orthotropes . . . . .	359
7.3.3.	Milieux continus transverses isotropes . . . . .	363
7.3.4.	Notions d'ondes anisotropes . . . . .	366
7.4	Exercices . . . . .	371
7.4.1.	Ondes de cisaillement. . . . .	371
7.4.2.	Mouvement de socle (onde plane uniaxiale) . . . . .	373
7.4.3.	Ondes dans un tube élastique . . . . .	380
7.4.4.	Ondes élastiques transverses isotropes . . . . .	382
7.4.5.	Constantes élastiques et vitesses de propagation d'ondes . . . .	384
<b>8</b>	<b>Thermoélasticité linéaire</b> . . . . .	<b>391</b>
8.1	Introduction et généralités . . . . .	391
8.2	Lois de comportement thermomécaniques. . . . .	392

8.2.1.	Principes thermodynamiques . . . . .	393
8.2.2.	Comportement thermomécanique admissible . . . . .	397
8.3	Eléments de thermoélasticité linéaire . . . . .	400
8.3.1.	Matériau de St Venant-Kirchhoff-Fourier. . . . .	401
8.3.2.	Equations en potentiels de la thermoélasticité . . . . .	405
8.3.3.	Atténuation des ondes volumiques thermoélastiques . . . . .	409
8.4	Exercices . . . . .	412
8.4.1.	Matériau de St Venant-Kirchhoff-Fourier. . . . .	412
8.4.2.	Mouvement de socle : milieu adiabatique . . . . .	414
8.4.3.	Contraintes thermiques dans un disque mince. . . . .	415
8.4.4.	Propagation de chaleur dans une barre. . . . .	419
8.4.5.	Propagation de chaleur dans une sphère. . . . .	423
8.4.6.	Propagation de chaleur dans un cylindre . . . . .	425
8.4.7.	Vibrations thermoélastiques axisymétriques. . . . .	428
<b>9</b>	<b>Lois de comportement non linéaire</b> . . . . .	<b>433</b>
9.1	Introduction . . . . .	433
9.2	Lois de la thermodynamique en TF . . . . .	435
9.2.1.	Conservation de l'énergie . . . . .	437
9.2.2.	Inégalité de l'entropie . . . . .	439
9.3	Lois de comportement compatibles. . . . .	443
9.3.1.	Matériaux thermomécaniques à dissipation normale. . . . .	443
9.3.2.	Elasticité isotherme en TF. . . . .	447
9.3.3.	Visco-hyperélasticité en TF. . . . .	460
9.4	Matériaux viscoélastiques à mémoire . . . . .	463
9.4.1.	Modèles viscoélastiques linéaires discrets. . . . .	463
9.4.2.	Modèles viscoélastiques linéaires. . . . .	467
9.4.3.	Modèles viscoélastiques en TF . . . . .	478
9.5	Notions sur les milieux faiblement continus. . . . .	488
9.5.1.	Variables internes . . . . .	489
9.5.2.	Milieux faiblement continus et plasticité. . . . .	490
9.6	Exercices . . . . .	491
9.6.1.	Indifférence matérielle en TF . . . . .	491
9.6.2.	Dérivation des invariants . . . . .	493
9.6.3.	Conditions d'hyperélasticité d'un matériau isotrope . . . . .	494
9.6.4.	Matériau de St Venant-Kirchhoff . . . . .	495
9.6.5.	Limites du modèle de St Venant-Kirchhoff . . . . .	498
9.6.6.	Cylindre épais isotherme sous pression interne . . . . .	500
9.6.7.	Matériau de Mooney-Rivlin . . . . .	504
9.6.8.	Torsion non linéaire d'un cylindre incompressible. . . . .	510

9.6.9. Problème d'applications : manchon cylindrique . . . . .	517
9.6.10. Matériau élastique transverse isotrope . . . . .	524
9.6.11. Sollicitation combinée de l'os fémoral. . . . .	528
9.6.12. Matériau de St Venant-Kirchhoff-Fourier. . . . .	533
9.6.13. Méthode asymptotique pour la thermoélasticité. . . . .	535
9.6.14. Milieux visco-hyperélastiques . . . . .	548
9.6.15. Notions sur les dérivées objectives de tenseurs . . . . .	550
<b>Bibliographie</b>	<b>555</b>
<b>Index</b>	<b>559</b>