

MÉCANIQUE & MATÉRIAUX

Cours
et exercices
corrigés

Introduction
au comportement
mécanique
des matériaux

Préface de Nicolas Moës,
de l'Académie des sciences

Tanguy Rouxel



I. Vu, de mes propres yeux vu !

(*Le Tartuffe*, Molière)

I.1 Cinématique

Des causes « mécaniques » du mouvement et de la déformation des objets de notre environnement, on ne voit que les effets ! Le roseau fléchit sous le vent, la feuille d'aluminium prend la forme de l'objet enveloppé, le sentier terreux garde les empreintes de ceux qui l'ont emprunté, le fil d'étain se plie entre le pouce et l'index, la coque de la noix se déforme et éclate sous les mâchoires du casse-noix. Tout matériau est déformable ! Un chargement mécanique – terme générique désignant toute forme de sollicitation mécanique : masse posée sur un objet, poids propre, force du vent, pincement d'une corde d'instrument de musique – entraîne des variations géométriques, de forme et de dimension. La matière s'est déformée, et ses composants élémentaires (atomes, molécules, grains, etc.) se sont déplacés. Le déplacement est d'ailleurs la seule grandeur visible et directement mesurable ; on ne sait toujours pas très bien ce qu'est une force !

L'étude du déplacement des particules de matière s'appelle *la cinématique* et permet de formuler des hypothèses sur la nature des forces qui en sont la cause, ainsi que sur le comportement du matériau. La cinématique s'intéresse donc à la trajectoire, à la vitesse et à l'accélération des particules, aux lignes de courant et à toute variation géométrique du milieu : étirement, amincissement, fléchissement, etc.

En étudiant la morphologie d'un cratère, afin d'identifier le champ de déplacement – on appelle champ l'ensemble des déplacements de toutes les particules de matière – qui a conduit à sa formation, on peut formuler une hypothèse sur son origine, et recueillir des informations sur la nature du matériau. Par exemple, l'étude de la forme des cratères situés aux pôles de la planète Mars (Pathare, 2005), qui résultent d'impacts météoritiques, permet de déterminer leur âge en examinant le rapport diamètre / hauteur (ce rapport diminue avec le vieillissement du cratère) (*cf.* § VIII.9), et le temps de relaxation associé à l'évolution de la géométrie des cratères correspond à celui de la glace à cette température (– 108 °C aux pôles en moyenne) et corrobore donc la présence d'eau aux pôles martiens ainsi qu'un vieillissement des cratères par fluage de la glace. L'étude de la forme du cratère de Winslow en Arizona a aussi permis de conclure à une origine météoritique, en précisant les conditions de son apparition, alors que jusqu'au XIX^e siècle, l'hypothèse d'une origine volcanique était privilégiée (Foster, 1957). La présence de cristaux de coésite et de stishovite, variétés allotropiques de la silice sous haute pression, témoigne de la violence de l'impact et de l'onde de choc qui en résulta. C'est par un phénomène d'érosion, et par l'action concomitante de la gravité (éboulement, fluage) que se réduit peu à peu la

profondeur d'un cratère. La mesure du déplacement donne donc de précieuses informations sur la nature du matériau et sur son comportement.

« Le roseau plie, et ne rompt pas ! » (*Le Chêne et le Roseau*, J. de La Fontaine). Il reprend sa position et sa forme initiales lorsque le vent tombe. On parle en ce cas d'élasticité, et c'est l'objet du chapitre III. Le papier d'aluminium froissé et le fil de cuivre plié ne reprennent pas leurs formes initiales. On parle de plasticité (*cf.* ch. VI). Dans le cas du miel qui s'écoule en quelques secondes ou du glacier qui descend la vallée sur plusieurs siècles, le processus est aussi irréversible, mais il dépend beaucoup du temps. On parle alors de viscosité, de viscoplasticité ou de fluage (*cf.* ch. VII).

Dans le cas général de l'élasticité, un changement de volume (ΔV) est observé. Pour une sphère (une boule, un ballon) sous pression, on notera une variation du rayon. Pour un barreau (un câble, un poteau) en traction, on remarquera une réduction du diamètre insuffisante pour compenser l'allongement, si bien que le volume augmente (il diminue en compression). Au contraire, dans les cas de la plasticité et de la viscoplasticité, l'étude du champ de déplacement met en évidence la prépondérance du cisaillement (ou du glissement), suivant des mécanismes qui, in-fine, n'induisent que peu ou pas de variations de volume (évolution isochore) (Fig. Ia).

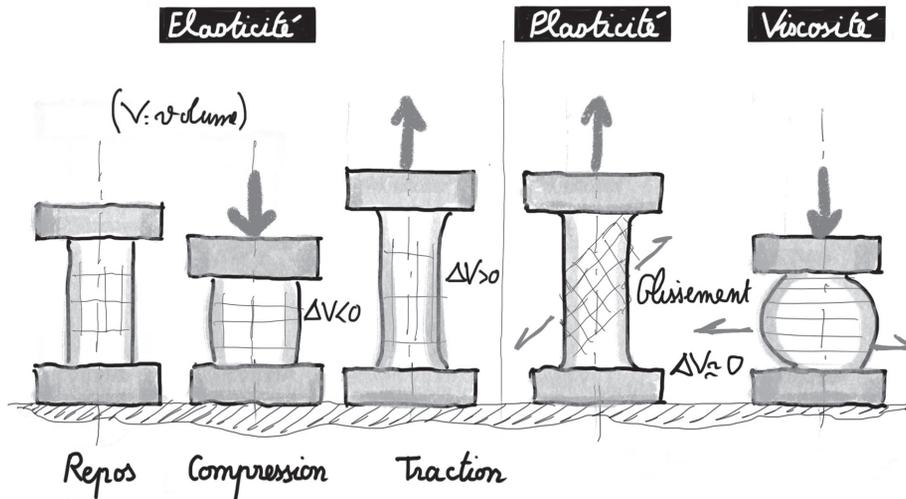


Fig. Ia : déformation d'un lopin cylindrique en compression suivant le comportement adopté.

Mais le déplacement, visible à l'œil, au microscope, ou à l'aide d'outils modernes d'observation (caméra, diffractomètre, interféromètre laser, etc.), mesurable, n'est pas la grandeur idéale pour étudier le matériau, car il dépend de la taille de l'objet. Par exemple, un câble d'acier de dix mètres de long s'allonge dix

fois plus qu'un câble d'un mètre de long de même diamètre (à charge égale). C'est pourquoi, pour décrire le comportement du matériau, il est judicieux de comparer les états (situations) avant (au repos) et après chargement, par exemple en prenant le rapport $(L - L_0)/L_0$ pour un câble en traction, où L est la longueur sous charge et L_0 celle au repos (Fig. Ib). La différence $L - L_0$ (notée aussi ΔL) est le déplacement maximum, c'est à dire celui d'une extrémité en prenant l'origine à l'extrémité opposée, et est appelée dans ce cas « allongement ». Le rapport $\Delta L/L_0$ décrit l'état déformé et s'appelle la déformation. On parle aussi dans ce cas d'allongement relatif.

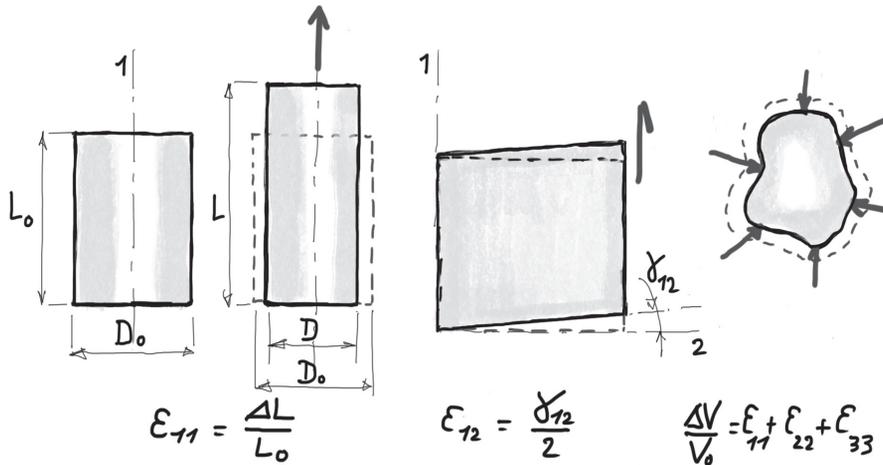


Fig. Ib : de gauche à droite : déformation induite par un chargement uniaxial, un cisaillement, ou une pression.

La déformation (notée ϵ) a l'avantage d'être indépendante des dimensions de l'objet pour un chargement (contrainte) donné. Le concept de déformation rend compte aussi bien des variations de forme, rattachées aux variations locales d'angles (par exemple l'angle dièdre formé par trois particules adjacentes) que de celles de volume, rattachées aux variations de longueur. Sur la Fig. Ib, la variation relative de longueur suivant l'axe 1 est notée ϵ_{11} , tandis qu'une distorsion angulaire entre les faces perpendiculaires aux axes 1 et 2 est notée γ_{12} . Ainsi que cela est expliqué au § I.3, la déformation angulaire est par définition égale à la moitié de la distorsion correspondante : $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}$. Pour un parallélépipède de volume $V = L_1 L_2 L_3$, la variation relative de volume $\Delta V/V$ vaut : $\Delta L_1/L_1 + \Delta L_2/L_2 + \Delta L_3/L_3$, c'est-à-dire $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Cependant, il existe plusieurs formulations pour la déformation. Par exemple, dans le cas d'une variation de longueur, on peut écrire : $\epsilon = (L - L_0)/L_0$, ou $\epsilon = (L - L_0)/L$, ou encore $\epsilon = \int_{L_0}^L dL/L_0 = \ln(L/L_0)$, etc. On voit bien ici, qu'à mesure que l'allongement devient grand devant la longueur initiale, ces expressions donnent des résultats qui s'éloignent de plus en plus les uns des

autres. Le quotient $\Delta L/L_0$ est le plus utilisé et s'appelle la déformation nominale, notée ε_N . La grandeur $\Delta L/L$, prise sur l'état déformé, est appelée déformation vraie et notée ε . Lorsque le volume est constant au cours de la déformation, $\varepsilon = \varepsilon_N/(1 + \varepsilon_N)$. La manière dont on choisit l'opérateur mathématique utilisé pour décrire la déformation n'est pas anodine. Cette question est abordée dans l'annexe II.

Dans le cas général, pour une géométrie de pièce et un chargement arbitraires, l'évolution de la géométrie sous chargement est complexe et la déformation n'est pas uniforme. Il est alors nécessaire de s'intéresser à la déformation locale en tout point (particule de matière) du matériau. La déformation locale se manifeste non seulement par des variations relatives de longueurs sur un petit domaine autour de la particule, mais aussi par des variations (distorsions) angulaires. La mise en évidence de la déformation locale et la mesure du champ de déplacement font l'objet du paragraphe suivant. Le choix des variables utilisées pour suivre le déplacement d'une particule de matière (champ local) est discuté au § I.3 et dans l'annexe II.

I.2 Mesure du déplacement

Le champ de déplacement étant la seule donnée expérimentale accessible directement, à partir de laquelle seront déterminés les paramètres dynamiques (force, contrainte) et les caractéristiques physiques comportementales du matériau (modules d'élasticité, seuil de plasticité, coefficient de viscosité, etc.), il est crucial de le mesurer avec précision. C'est la précision inégalée, à l'époque, sur la mesure de la longueur correspondant à un degré sur un méridien qui permit aux membres de l'expédition franco-suédoise conduite en 1736 par P. L. Moreau de Maupertuis de conclure à l'aplatissement de la terre aux pôles (Moreau De Maupertuis, 1742), conformément aux prédictions d'I. Newton (Newton, 1687). La longueur d'un degré de méridien était définie en Laponie comme 111,947 km, contre 111,210 km à Paris. Les mesures de Maupertuis (corrigées par la suite) s'appuyaient sur les calculs d'A. Clairaut sur la géométrie d'une sphère aplatie (sphéroïde de Clairaut). Ces calculs conduiront Clairaut à la publication d'un ouvrage majeur, *Figure de la Terre tirée des lois de l'Hydrostatique* (Clairaut, 1743), quelques années plus tard, où il parvient à trouver la forme de la Terre avec précision en considérant un mouvement de rotation autour d'un axe, et des particules soumises à la loi de l'attraction universelle. Pour cela, l'hypothèse retenue pour la constitution de la Terre est celle de couches variant de densité.

C'est aussi la mesure du déplacement relatif des atomes de fer dans les poutres en fer puddlé utilisées pour la tour Eiffel ou pour la statue de la liberté (l'acier est à cette époque encore en émergence dans le domaine de la construction alors que le fer est devenu populaire à partir du milieu du XIX^e siècle), de manière

non destructive, à l'aide d'un diffractomètre de rayons X portatif, qu'il a été possible d'affirmer dans les années 1980 qu'une fraction de ces poutres ne supportaient aucune charge ($\varepsilon = 0$) et étaient donc inutiles du point de vue de la résistance mécanique structurelle (voire néfaste eu égard au poids que cela représente sur la structure), même si l'esthétique de l'ensemble s'en accommode très bien. Suivant la loi de la diffraction des solides cristallins obtenue par W.H. et W.L. Bragg (Fig. Ic), la déformation est donnée par $\varepsilon = \Delta d_{hkl} / d_{hkl} = -\cotg \theta \Delta \theta$, où d_{hkl} est la distance entre les plans atomiques d'indices de Miller (h, k et l) (cf. annexe I) et θ est l'angle de diffraction (Bragg, 1913).

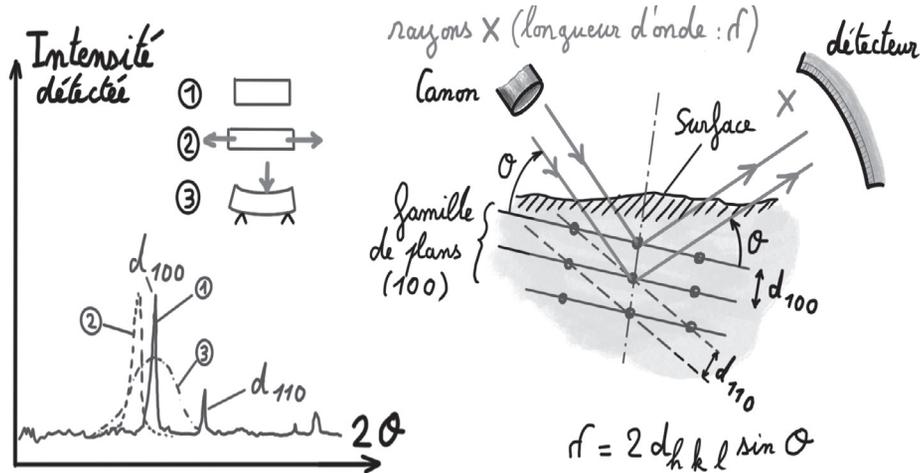


Fig. Ic : mesure de la déformation par diffraction des rayons X. Une sollicitation en traction conduit à un décalage du pic vers les plus petits angles tandis qu'une flexion produit un élargissement du pic.

C'est encore une mesure de déplacement – celui qui est associé à la dilatation d'un liquide dans un tube – qui rend compte de la température sur l'échelle graduée d'un thermomètre. On mesure aussi en continu le déplacement de la matière au sein des ouvrages d'arts ou des pièces d'avions les plus sensibles, par immersion de capteurs (fibres avec réseaux de Bragg, jauges électriques, etc.) dans le béton ou dans les composites à base de fibres de carbone, pour suivre la santé de la structure dans les conditions de service. A côté des mesures locales, devenues classiques à l'aide de jauges d'extensométrie, les mesures globales de champ par des méthodes optiques ont pris un essor considérable dans les vingt dernières années (Grédiac, 2012). Citons en particulier les mesures par corrélation d'images en surface, et chaque fois que cela est possible, en volume (par exemple par tomographie), qui reposent sur l'analyse du champ de déplacement de traceurs (par exemple les particules d'un mouchetis en surface, ou encore des inclusions dispersées dans le matériau) en comparant des images prises successivement au cours de la déformation (Fig. Id).

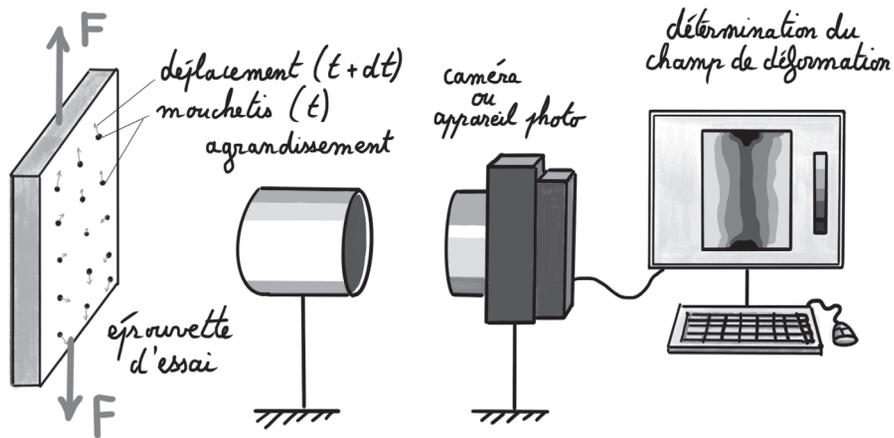


Fig. Id : principe de la mesure du champ de déplacement par corrélation d'images (Digital Image Correlation).

Plus récemment (en 2015), c'est en mesurant un déplacement de l'ordre de 10^{-18} m, soit environ mille fois plus petit qu'un proton, sur une distance de plusieurs kilomètres, qu'il a été possible de détecter une onde gravitationnelle (Pinard, 2017). Cette onde résultait de la rotation et de la coalescence de deux trous noirs. Le déplacement de ces masses gigantesques a engendré un signal de fréquence et d'amplitude permettant respectivement d'estimer la masse des trous noirs et leur distance relative. Plus la fréquence est faible, plus les trous noirs sont massifs (*cf.* § I.4) et plus ils sont proches, plus le signal est intense. Des déformations de l'ordre de 10^{-22} ont été mesurées à l'aide de détecteurs interférométriques. Pour parvenir à une telle sensibilité de mesure, qui représente l'état de l'art en la matière, les miroirs des cavités optiques sont des palets de 35 à 55 cm de diamètre, la plus grande taille étant réservée au miroir central séparateur de faisceau, et jusqu'à 20 cm d'épaisseur. Ils sont constitués de verre de silice de haute pureté, contenant moins de 1 ppm (partie pour million) d'ions hydroxyle (OH^-), polis au niveau atomique, pour limiter la diffusion, et revêtus d'un mince dépôt réfléchissant à base d'oxydes de titane, de tantale et de silicium. La pureté des matériaux et la qualité du dépôt sont essentielles pour réduire l'absorption optique, source de déformation par dilatation thermique. Afin de limiter le bruit sismique qui peut se propager jusqu'aux miroirs et ainsi masquer le signal d'onde gravitationnelle, les grands miroirs sont suspendus par quatre fibres en verre de silice qui sont elles-mêmes attachées à des atténuateurs sismiques montés en série. Cette chaîne de suspension, appelée « super-atténuateur », fait près de 10 mètres de haut et est placée sous vide, comme l'ensemble de la cavité optique, sur 3 km de longueur. Beaucoup des défis technologiques de cette instrumentation « extrême » relèvent de la mécanique des matériaux, de la construction de l'interféromètre, au façonnage des miroirs, et à la conception des super-atténuateurs ! Les progrès dans

ce domaine repose largement sur la sensibilité de la mesure du déplacement et les développements techniques à venir.

I.3 Echelle d'observation et forme locale de la déformation

La matière est constituée d'atomes, susceptibles de s'organiser pour former des molécules, et eux-mêmes constitués de particules élémentaires qui sont repérées par les lois de la physique – et donc de la mécanique – quantique, les seules valables à cette échelle. Il est excitant d'aller sonder ce qui se passe à l'échelle de l'atome et de son nuage d'électrons pour rechercher le rôle d'un élément chimique ou d'une unité structurale – tétraèdre silicaté d'un verre, feuillet chimique des composés bidimensionnels, macromolécule d'un polymère (cf. annexe I) – sur une propriété physicochimique ou pour expliquer des phénomènes physiques remarquables comme la piézoélectricité ou la ferroélasticité. Cependant, dans la grande majorité des cas, la résolution d'un problème de mécanique se fait à l'échelle du continuum, c'est-à-dire à une échelle suffisamment grande pour que la nature discrète et hétérogène de la matière s'efface pour laisser la place à un milieu où les propriétés physiques ne semblent plus dépendre de la position (Fig. 1e).

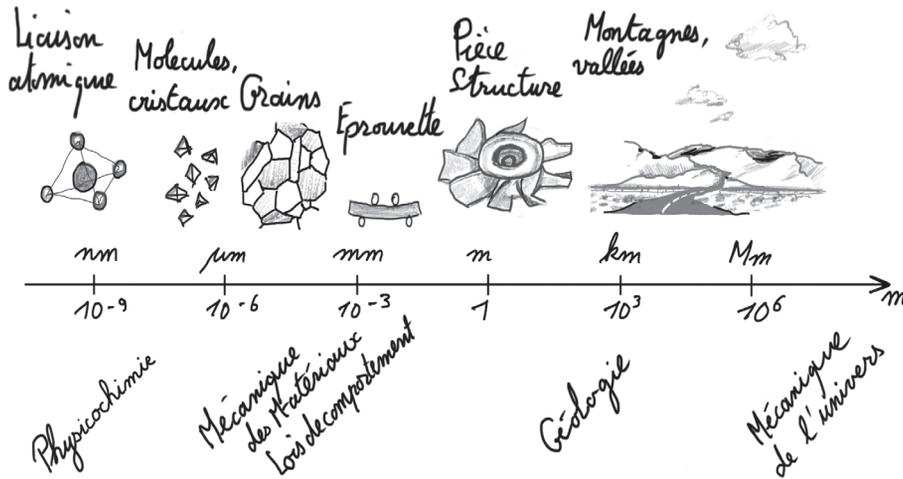


Fig. 1e : les différentes échelles d'étude et de modélisation du comportement mécanique.

Le milieu, alors considéré comme « homogène », permet d'exprimer les équations de la mécanique des milieux continus (cf. annexe II), qui ouvrent la voie au calcul des structures et au dimensionnement. Pour que les calculs ne soient pas trop longs, même avec les calculateurs puissants d'aujourd'hui, on choisira une échelle assez proche de celle de la structure macroscopique de l'objet. Par exemple

pour un verre, le continuum commence dès que l'observation se fait sur plus d'une dizaine de nanomètres. Mais pour dimensionner un élément en verre – par exemple un panneau de la verrière de la gare de Strasbourg, qui en compte 900, en verre feuilleté cintré à froid, presque tous de formes différentes – en utilisant la méthode des éléments finis, on ne va pas mailler la structure avec des éléments de 100 nm de côté ; cela en ferait 10^{14} , soit cent mille milliards pour une surface à modéliser de 1 m^2 ! Ainsi, la particule de matière qui est invoquée en mécanique des matériaux est généralement bien plus grosse qu'un encombrement atomique ou moléculaire.

A l'échelle du continuum, il n'est plus nécessaire de formuler explicitement une hypothèse particulière sur la nature des liaisons interatomiques en jeu, et sur la forme des potentiels interatomiques, à la source même des équations générales de l'élasticité. On considère en effet le système équivalent constitué de particules de matière (au sens du continuum) dont on étudiera les déplacements pour accéder à la déformation et à la contrainte en tout point (centré sur les particules). En limitant l'exposé à la description la plus fréquemment adoptée dans le domaine de la mécanique des matériaux, on définit à l'instant (t), en tout point (M) associé à une particule de matière, six composantes de déformation correspondant aux variations relatives de longueurs suivant les axes 1, 2 et 3 d'un repère cartésien, et les variations d'angles $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$ et $\langle 1, 3 \rangle$. Ces composantes de la déformation locale sont rassemblées dans un opérateur unique appelé tenseur de la déformation. Dans le cas de petites perturbations, soit typiquement pour $\varepsilon < 10^{-2}$, ce tenseur est noté $\tilde{\varepsilon}$, et on peut relier simplement ses composantes, ε_{ij} , au déplacement local, représenté par le vecteur \vec{u} , de coordonnées u_i , $i = 1, 2, 3$, en écrivant (notations explicitées dans l'annexe II) : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$. Cela donne, pour un étirement suivant l'axe 1, $\varepsilon_{11} = u_{1,1} = \Delta L_1 / L_1$, et pour un cisaillement causant la variation de l'angle $\langle 1, 2 \rangle$, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})$, soit en assimilant la variation d'angle à sa tangente, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}$, où γ_{12} est la variation de l'angle $\langle 1, 2 \rangle$, appelée aussi distorsion angulaire (Fig. 1b).

Des problèmes très variés peuvent ainsi être traités : la déformation d'un globule rouge, sphérique au repos, pour une raison mécanique de minimisation d'énergie, et en forme de galette ou de parachute quand il se déplace, pour circuler dans un capillaire ou se frayer un chemin entre les failles de la paroi vasculaire ; la flexion d'une planche de plongeur ou d'une aile d'avion ; ou encore la déformation d'une chaîne de montagnes sous l'action de la gravité ou de l'activité géologique (tectonique des plaques).

I.4 Histoires d'atomes et de molécules

On a pu vérifier dans le cas d'un matériau cristallin, que tant que celui-ci est sollicité dans son domaine élastique, la déformation mesurée à l'échelle