

**MP21  
MPI**

# INFORMATIQUE

**Cours et exercices corrigés**



**ellipses**

Thibaut Balabonski  
Sylvain Conchon  
Jean-Christophe Filiâtre  
Kim Nguyen  
Laurent Sartre

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Avant-goût</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Notions d'architecture et de système</b>	<b>5</b>
2.1	Arithmétique des ordinateurs . . . . .	5
2.1.1	Représentation des entiers . . . . .	6
2.1.2	Représentation approximative des nombres réels . . . . .	11
2.2	Modèle de von Neumann . . . . .	16
2.2.1	Composants d'un ordinateur . . . . .	17
2.2.2	Organisation de la mémoire . . . . .	20
2.2.3	Langage machine et assembleur . . . . .	24
2.3	Système d'exploitation . . . . .	26
2.3.1	L'interface système ou <i>shell</i> . . . . .	27
2.3.2	Fichiers et redirections . . . . .	42
2.3.3	Commandes utiles . . . . .	44
	Exercices . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Programmation fonctionnelle avec OCaml</b>	<b>49</b>
3.1	Premiers pas . . . . .	50
3.1.1	Déclarations globales et expressions simples . . . . .	50
3.1.2	Interprétation et compilation d'un programme . . . . .	51
3.1.3	Inférence de types . . . . .	53
3.1.4	Expressions simples . . . . .	54
3.1.5	Fonctions simples . . . . .	58
3.1.6	Déclarations locales . . . . .	62
3.1.7	Instructions . . . . .	63
3.1.8	Commentaires . . . . .	66
3.1.9	Modules . . . . .	67
3.2	Données structurées . . . . .	69
3.2.1	Paires et <i>n</i> -uplets . . . . .	69
3.2.2	Enregistrements . . . . .	71

3.2.3	Énumérations . . . . .	75
3.2.4	Sommes disjointes avec arguments . . . . .	79
3.3	Récurtivité . . . . .	81
3.3.1	Fonctions récursives . . . . .	82
3.3.2	Récursion terminale . . . . .	87
3.3.3	Types récursifs . . . . .	94
3.4	Polymorphisme . . . . .	97
3.5	Ordre supérieur . . . . .	99
3.6	Traits impératifs . . . . .	104
3.6.1	Structures de données modifiables . . . . .	105
3.6.2	Boucles . . . . .	110
3.6.3	Exceptions . . . . .	111
3.6.4	Entrées-Sorties . . . . .	114
	Exercices . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Programmation impérative avec C</b>	<b>123</b>
4.1	Premiers pas . . . . .	124
4.1.1	Généralités . . . . .	124
4.1.2	Types et opérations élémentaires . . . . .	125
4.1.3	Structures de contrôle . . . . .	127
4.1.4	Modèle d'exécution . . . . .	131
4.2	Pointeurs, tableaux et structures . . . . .	134
4.2.1	Pointeurs . . . . .	134
4.2.2	Tableaux . . . . .	137
4.2.3	Structures . . . . .	142
4.3	Entrées-sorties . . . . .	146
4.3.1	Affichage sur la sortie standard . . . . .	146
4.3.2	Lecture sur l'entrée standard . . . . .	146
4.3.3	Ligne de commande . . . . .	147
4.3.4	Gestion de fichiers . . . . .	147
4.4	Modularité . . . . .	148
4.5	Comparaison des langages C et OCaml . . . . .	154
	Exercices . . . . .	155
<b>5</b>	<b>Bonnes pratiques de la programmation</b>	<b>159</b>
5.1	Code source . . . . .	159
5.2	Compilation . . . . .	162
5.3	Exécution . . . . .	164
5.4	Validation, test . . . . .	168
5.5	Quelques conseils . . . . .	171
	Exercices . . . . .	172

<b>6</b>	<b>Raisonner sur les programmes</b>	<b>175</b>
6.1	Correction . . . . .	180
6.1.1	Spécification d'un problème algorithmique . . . . .	180
6.1.2	Preuves de correction par récurrence . . . . .	184
6.1.3	Invariants de boucle . . . . .	193
6.1.4	Cas d'étude : correction d'algorithmes de tri . . . . .	199
6.2	Terminaison . . . . .	212
6.2.1	Technique du variant . . . . .	213
6.2.2	Relations binaires et ensembles ordonnés . . . . .	215
6.2.3	Ordres bien fondés . . . . .	225
6.3	Complexité . . . . .	233
6.3.1	Cadre pour la complexité temporelle . . . . .	233
6.3.2	Complexité des boucles . . . . .	238
6.3.3	Cas d'étude : complexité du tri fusion ascendant . . . . .	242
6.3.4	Modèles pour la complexité en moyenne et probabilités . . . . .	245
6.3.5	Complexité des fonctions récursives . . . . .	251
6.3.6	Cas d'étude : complexité moyenne du tri rapide . . . . .	255
6.3.7	Complexité amortie . . . . .	259
6.3.8	Complexité spatiale . . . . .	264
6.4	Induction structurelle . . . . .	268
6.4.1	Aperçu : mobiles de Calder . . . . .	268
6.4.2	Objets inductifs . . . . .	273
6.4.3	Formalisation des constructions inductives . . . . .	282
6.4.4	Principe d'induction structurelle . . . . .	288
6.4.5	Cas d'étude : correction d'un renversement de liste efficace . . . . .	294
6.5	Cas d'étude : analyse d'un tri de listes . . . . .	297
	Exercices . . . . .	306
<b>7</b>	<b>Structures de données</b>	<b>323</b>
7.1	Types et abstraction . . . . .	323
7.2	Structures de données séquentielles . . . . .	327
7.2.1	Tableaux . . . . .	327
7.2.2	Tableaux redimensionnables . . . . .	328
7.2.3	Listes chaînées . . . . .	333
7.2.4	Piles . . . . .	343
7.2.5	Files . . . . .	351
7.2.6	Tables de hachage . . . . .	357
7.3	Structures de données hiérarchiques . . . . .	368
7.3.1	Arbres binaires . . . . .	368
7.3.2	Arbres binaires de recherche . . . . .	377
7.3.3	Tas et files de priorité . . . . .	394

7.3.4	Arbres . . . . .	405
7.3.5	Arbres préfixes . . . . .	411
7.3.6	Structure unir et trouver ( <i>union-find</i> ) . . . . .	416
7.4	Des ensembles . . . . .	422
	Exercices . . . . .	425
<b>8</b>	<b>Graphes</b>	<b>437</b>
8.1	Définitions . . . . .	438
8.1.1	Graphes orientés . . . . .	438
8.1.2	Graphes non orientés . . . . .	440
8.1.3	Graphes pondérés . . . . .	441
8.1.4	Graphes bipartis . . . . .	442
8.2	Structures de données . . . . .	443
8.2.1	Matrice d'adjacence . . . . .	444
8.2.2	Listes d'adjacence . . . . .	445
8.2.3	Graphes non orientés . . . . .	445
8.2.4	Graphes pondérés . . . . .	447
8.3	Algorithmique des graphes . . . . .	448
8.3.1	Parcours en profondeur . . . . .	449
8.3.2	Parcours en largeur . . . . .	457
8.3.3	Plus court chemin . . . . .	461
8.3.4	Composantes fortement connexes . . . . .	476
8.3.5	Arbre couvrant de poids minimum . . . . .	480
8.3.6	Couplage maximum dans un graphe biparti . . . . .	484
	Exercices . . . . .	488
<b>9</b>	<b>Algorithmique</b>	<b>493</b>
9.1	Arithmétique . . . . .	493
9.1.1	Algorithme d'Euclide . . . . .	493
9.1.2	Arithmétique modulaire . . . . .	497
9.1.3	Crible d'Ératosthène . . . . .	499
9.2	Retour sur trace ( <i>backtracking</i> ) . . . . .	501
9.3	Algorithme glouton . . . . .	507
9.4	Décomposition d'un problème en sous-problèmes . . . . .	512
9.4.1	Diviser pour régner . . . . .	512
9.4.2	Programmation dynamique . . . . .	522
9.5	Algorithmique des textes . . . . .	533
9.5.1	Recherche dans un texte . . . . .	533
9.5.2	Compression . . . . .	544
9.6	Algorithmes probabilistes . . . . .	559
9.6.1	Échantillonnage . . . . .	560

9.6.2	Problème de $N$ reines . . . . .	563
9.6.3	Test de primalité . . . . .	565
9.7	Algorithmique pour l'intelligence artificielle et l'étude des jeux . . .	567
9.7.1	Apprentissage . . . . .	567
9.7.2	Jeux à deux joueurs . . . . .	585
Exercices	. . . . .	596
<b>10</b>	<b>Logique</b>	<b>605</b>
10.1	Logique propositionnelle . . . . .	608
10.1.1	Variable et formule propositionnelles . . . . .	608
10.1.2	Sémantique . . . . .	615
10.1.3	Conséquence logique . . . . .	621
10.1.4	Équivalence sémantique . . . . .	622
10.1.5	Substitution . . . . .	624
10.1.6	Formes normales . . . . .	625
10.2	SAT . . . . .	629
10.2.1	Algorithme de Quine . . . . .	631
10.2.2	Une modélisation SAT . . . . .	633
10.2.3	2-SAT . . . . .	636
10.3	Logique du premier ordre . . . . .	639
10.3.1	Domaine, termes et prédicats . . . . .	639
10.3.2	Formules du premier ordre . . . . .	642
10.4	Déduction naturelle . . . . .	647
10.4.1	Déduire . . . . .	647
10.4.2	Déduction naturelle propositionnelle . . . . .	652
10.4.3	Déduction naturelle pour la logique du premier ordre . . .	663
10.5	Prédicats inductifs . . . . .	667
10.5.1	Systèmes d'inférence et principe d'induction . . . . .	667
10.5.2	Correction de la déduction naturelle propositionnelle . . . .	676
10.5.3	Cas d'étude : caractériser les programmes bien typés . . . .	680
Exercices	. . . . .	685
<b>11</b>	<b>Bases de données</b>	<b>695</b>
11.1	Le modèle entité-association . . . . .	696
11.2	Le modèle relationnel . . . . .	700
11.2.1	Relation . . . . .	700
11.2.2	Clé primaire . . . . .	704
11.2.3	Clé étrangère . . . . .	705
11.3	Requêtes SQL . . . . .	709
11.3.1	Sélection . . . . .	711
11.3.2	Opérations ensemblistes . . . . .	718

11.3.3	Jointure . . . . .	722
11.3.4	Fonctions d'agrégation . . . . .	730
11.3.5	Requêtes de groupe . . . . .	734
	Exercices . . . . .	739
<b>12</b>	<b>Langages formels</b>	<b>745</b>
12.1	Langages réguliers . . . . .	747
12.1.1	Alphabets, mots et langages . . . . .	747
12.1.2	Langages réguliers, expressions régulières . . . . .	752
12.2	Automates de mots finis . . . . .	758
12.2.1	Automates déterministes . . . . .	759
12.2.2	Automates non déterministes . . . . .	766
12.2.3	Détermination et suppression des transitions spontanées . . . . .	772
12.2.4	Théorème de Kleene . . . . .	777
12.2.5	Propriétés des langages réguliers . . . . .	788
12.2.6	Implémentation des algorithmes . . . . .	792
12.3	Grammaires non contextuelles . . . . .	801
12.3.1	Grammaires et langages non contextuels . . . . .	802
12.3.2	Ambiguïté d'une grammaire . . . . .	806
12.3.3	Analyse syntaxique . . . . .	811
	Exercices . . . . .	816
<b>13</b>	<b>Calculabilité</b>	<b>823</b>
13.1	Décidabilité . . . . .	826
13.1.1	Règles du jeu . . . . .	826
13.1.2	Problème de l'arrêt . . . . .	827
13.1.3	Problèmes de décision et indécidabilité . . . . .	831
13.1.4	Algorithme universel . . . . .	836
13.1.5	Réduction calculatoire . . . . .	837
13.2	Classes de complexité . . . . .	842
13.2.1	Problèmes de recherche et d'optimisation . . . . .	842
13.2.2	Modèle de complexité . . . . .	845
13.2.3	Classe P . . . . .	846
13.2.4	Réductions polynomiales . . . . .	850
13.2.5	Classe NP . . . . .	851
13.3	NP-complétude . . . . .	855
13.3.1	Problème de référence : SAT . . . . .	857
13.3.2	Coloriage de graphe . . . . .	863
13.3.3	La tournée du voyageur de commerce . . . . .	868
13.4	Algorithmes d'optimisation . . . . .	874
13.4.1	Algorithmes d'approximation . . . . .	875

13.4.2	Séparation et évaluation . . . . .	883
13.5	Modèles historiques et complétude calculatoire . . . . .	890
13.5.1	Lambda-calcul . . . . .	891
13.5.2	Machines de Turing . . . . .	894
13.5.3	Complétude Turing . . . . .	897
13.5.4	Machines de Turing et complexité . . . . .	898
	Exercices . . . . .	901
<b>14</b>	<b>Gestion de la concurrence et synchronisation</b>	<b>905</b>
14.1	Processus . . . . .	905
14.2	Bibliothèques de <i>Threads POSIX</i> . . . . .	909
14.3	Atomicité . . . . .	913
14.4	Mutex . . . . .	914
14.5	Sémaphores . . . . .	920
	Exercices . . . . .	928
	<b>Solutions des exercices</b>	<b>933</b>
	<b>Index</b>	<b>1075</b>