



EN
CARTES
MENTALES

T^{le}

OPTION

MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

EN CARTES MENTALES

- » L'essentiel du cours
- » 15 cartes mentales
- » 165 exercices corrigés



ellipses

L'essentiel du cours

1 Définition

THÉORÈME ET DÉFINITION 1.1.

Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée fonction **exponentielle** et est notée **exp**.

On a donc :

$$\exp' = \exp$$

et :

$$\exp(0) = 1$$

À savoir

- \exp est une nouvelle fonction définie sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée.
- \exp est une fonction qui ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- Il n'existe qu'une seule fonction qui vérifie ces relations.

2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ 1.2.

Pour tous x et y réels et pour tout n entier relatif on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) ; \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n ; \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

À savoir

- La fonction exponentielle transforme les sommes en produits et les différences en quotients.
- La dernière propriété permet d'écrire, avec $x = 1$, $\exp(n) = (\exp(1))^n$. Cela permet d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1.3.

Par convention, on note :

$$e = \exp(1) \approx 2,71828$$

et pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

On peut ainsi réécrire la propriété 1.2 avec cette nouvelle notation :

PROPRIÉTÉ 1.4.

Pour tous x et y réels et pour tout n entier relatif, on a :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y ; e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n ; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

À savoir

- Les règles de calculs fonctionnent comme avec les puissances.

3 Étude de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ 1.5.

Signe : Pour tout réel x , $e^x > 0^x$.

Variations : La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

PROPRIÉTÉ 1.6.

Pour tout a et b réels :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

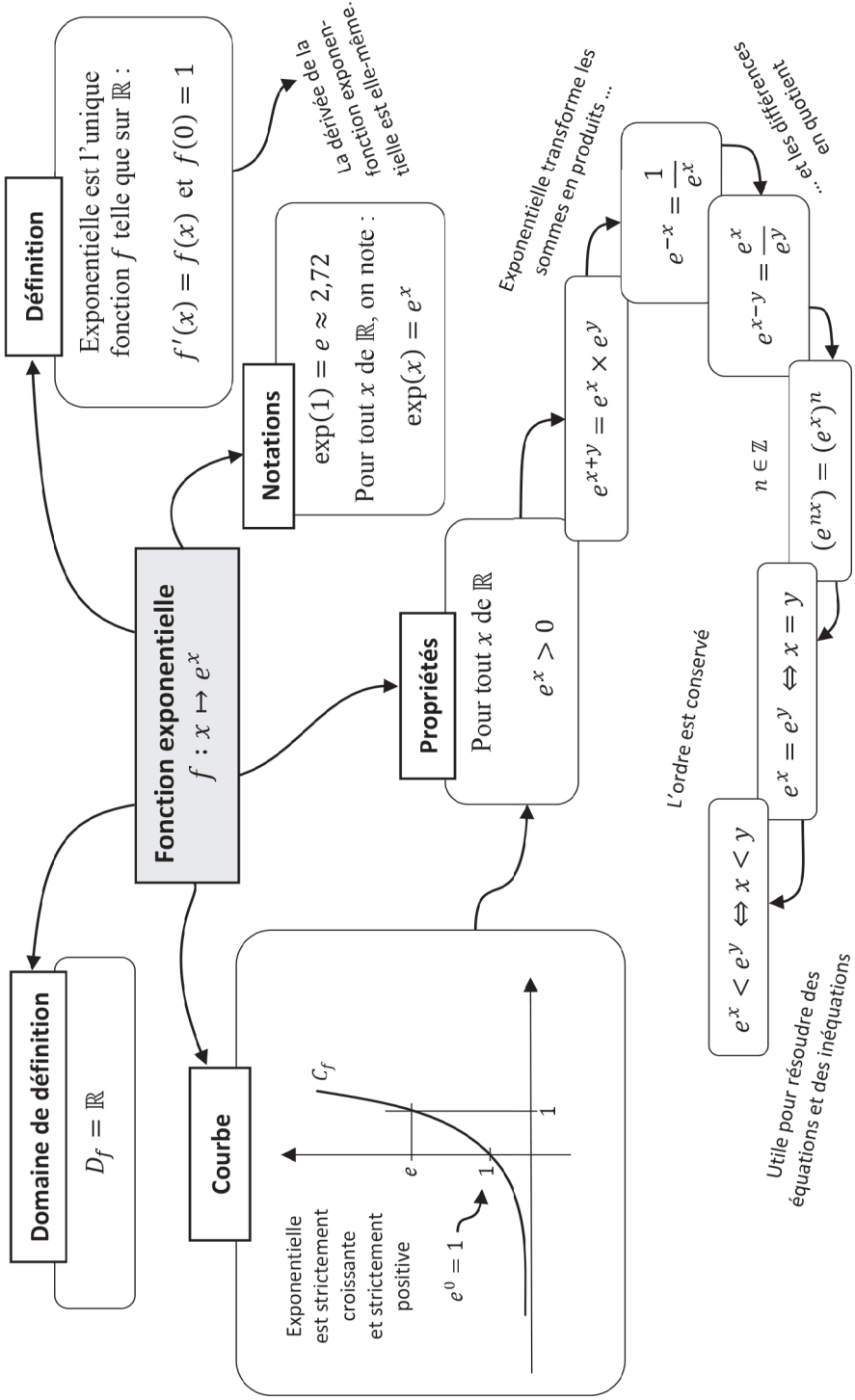
$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

À savoir

- Tracer le tableau de variations et l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.
- Résoudre des équations et des inéquations.



► CARTE MENTALE 1. Fonction exponentielle



▶ Les exercices pour préparer son contrôle

| Exercice 1.1.

Simplifier les expressions suivantes, pour x réel :

$$A = e \times e^{x+5} ; \quad B = \frac{e^{7x-1}}{e} ; \quad C = \frac{e^{-x} \times e^x}{(e^x)^3} ; \quad D = \frac{e^{-3+x}}{e^{2x+1}} ; \quad E = \frac{7e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2-1}}$$

📖 Corrigé page 165.

| Exercice 1.2.

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} .

① $e^{2x+1} = e^{x-5}$

② $e^{3x-1} = 1$

③ $e^{-\frac{1}{x}} = e^{x+3}$

④ $(e^{7x} - e)(e^{3x} - 1) = 0$

📖 Corrigé page 165.

| Exercice 1.3.

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

① $e^{2x} \leq e^{x+3}$

② $e^{x+1} \leq \frac{1}{e^x}$

📖 Corrigé page 165.

| Exercice 1.4.

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

① $f_1(x) = 3e^x + 2$ sur \mathbb{R} .

② $f_2(x) = xe^x$ sur \mathbb{R} .

3 $f_3(x) = \frac{e^x}{x}$ sur \mathbb{R}^* .

4 $f_4(x) = (e^x + 1)(3e^x - x)$ sur \mathbb{R} .

👉 Corrigé page 165.

Exercice 1.5.

Déterminer sur leur ensemble de définition, le sens de variations de chacune des fonctions suivantes :

1 $f_1(x) = -2e^x + 5$

2 $f_2(x) = (x+2)e^x$

3 $f_3(x) = xe^{-x}$.

👉 Corrigé page 166.

Exercice 1.6.

Pour chaque question de cet exercice, une seule proposition sur les quatre proposées est juste, laquelle ? Justifier.

1 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1-4x}$.

a. $f'(x) = \frac{e^x}{-4}$

c. $f'(x) = e^x(5-4x)$

b. $f'(x) = \frac{e^x(5-4x)}{(1-4x)^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^x(-3-4x)}{(1-4x)^2}$

2 L'ensemble des solutions de l'inéquation $e - e^{-2+x} > 0$ est :

a. $] -\infty; 3[$

c. $] 2; +\infty[$

b. $] 3; +\infty[$

d. $] -\infty; 2[$

3 Pour tout réel x , $e^{x+5} - 2e^x$ est du même signe que :

a. $e^5 + 2$

c. e^{x+3}

b. $e^x - 2$

d. $e^5 - 2$

4 Pour tout réel x , $e^{3x+2} \times e^x$ est égal à :

a. $e^{(3x+2)x}$

c. $e^{3x} + 2e^{2x}$

b. e^{4x+2}

d. $e^{3x} \times e^{2x}$

👉 Corrigé page 166.

Exercice 1.7.

Sujet du BAC, exercice A, Amérique du Nord, 2021.

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Pour tous réels a et b , on a : $(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}$

 [Corrigé page 166.](#)

L'essentiel du cours

Déterminer les limites d'une fonction f aux bornes de son ensemble de définition, c'est étudier l'évolution des valeurs de $f(x)$ lorsque x se « rapproche » des bornes ou d'un réel de l'ensemble de définition. Les bornes peuvent être infinies.

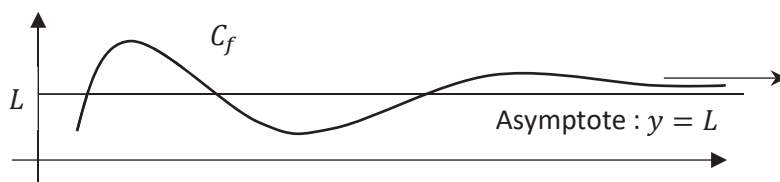
1 Limite quand x tend vers l'infini

DÉFINITION 2.1.

Soit L un réel.

La fonction f a pour **limite** L quand x tend vers $+\infty$ si toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand se situent à proximité de L .

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et la droite horizontale d'équation $y = L$ est appelée asymptote horizontale à la courbe de f .



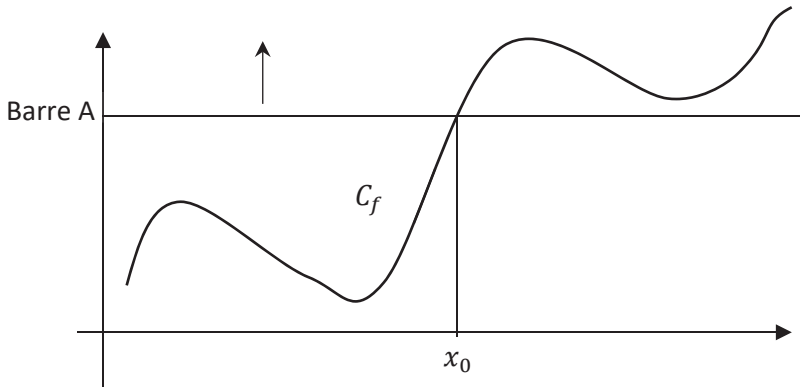
À savoir

- Tracer une fonction dans un repère.
- Graphiquement la courbe C_f vient se « coller » dans un tube centré sur la droite asymptote horizontale d'équation $y = L$.

DÉFINITION 2.2.

La fonction f a pour **limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si pour tout réel A , toutes les valeurs de $f(x)$ passent au-dessus de A pour x assez grand.

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



À savoir

- Graphiquement, quelle que soit la hauteur de la « barre » A , la courbe C_f finit par passer au-dessus de la « barre » A .
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini.
- Remarque : On a des définitions analogues quand x tend vers $-\infty$.

2 Limite quand x tend vers un réel a

DÉFINITION 2.3. LIMITE À GAUCHE DE a

La fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures si quelle que soit la valeur de A , toutes les valeurs de $f(x)$ passent au-dessus de A pour x qui se rapproche de a par la gauche.

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale.

