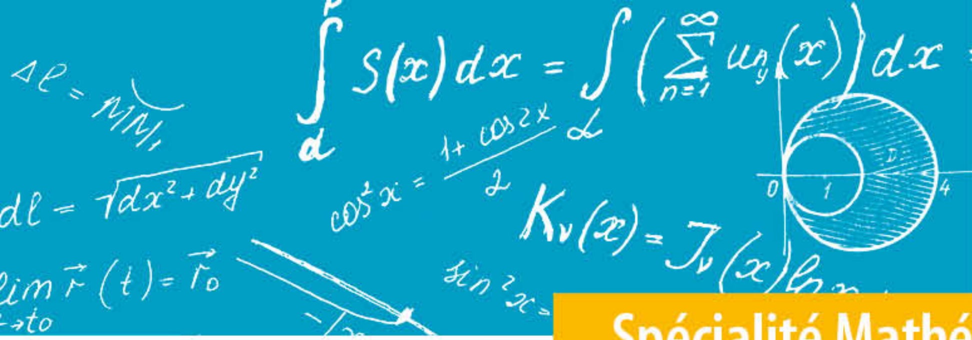
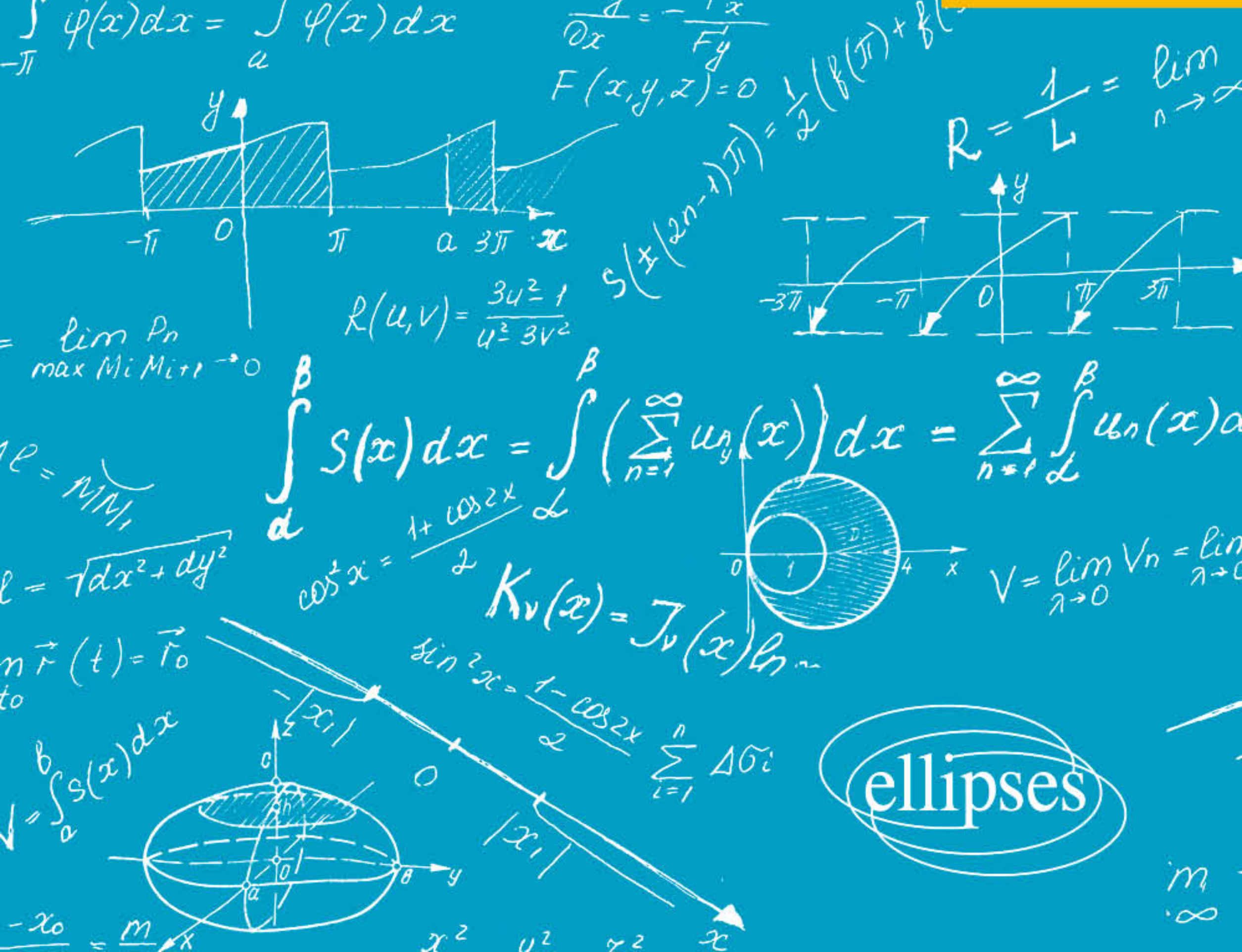


Tle

Spécialité Mathématiques

Problèmes corrigés d'entraînement progressif

Alice Ordines



ellipses

Problème 1

Suites sans pré-requis

1. Outils

Ce problème ne requiert pas de pré-requis, seulement de très bonnes compétences sur les suites géométriques de Première.
Principaux outils utiles :

Définition : Une suite est dite géométrique si elle vérifie une relation de récurrence du type $U_{n+1} = qU_n$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$, $U_0 \in \mathbb{R}|\{0\}$.

Les conditions sur q et U_0 excluent les suites constantes.

Expression explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 : $U_n = U_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété :
Soit (U_n), une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.

— Si $U_0 < 0$ et $q > 1$ alors (U_n) est décroissante et diverge vers $-\infty$.
— Si $U_0 > 0$ et $q > 1$ alors (U_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
— Si $q < -1$, alors (U_n) est non monotone et diverge.

Méthodes :
Pour **montrer qu'une suite n'est pas arithmétique**, on calcule trois termes consécutifs (souvent U_0, U_1 et U_2) et on montre que la différence des termes consécutifs n'est pas constante :
Le calcul conduit à $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$.

Pour **montrer qu'une suite n'est pas géométrique**, on calcule trois termes consécutifs (souvent U_0, U_1 et U_2) et on montre que le quotient des termes consécutifs n'est pas constant :
Le calcul conduit à $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$.

Pour **montrer qu'une suite est géométrique**, on exprime U_{n+1} en fonction de U_n pour tout n. Pour cela, **on doit factoriser et travailler avec un n quelconque**, sans lui attribuer de valeur.

2. Énoncé

Les résultats de la partie A pourront être utilisés dans les parties B et C.
Les parties B et C sont indépendantes.

Partie A :

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} W_{n+1} = 4W_n \\ W_0 = -3 \end{cases}$.

1. Quelle est la nature de la suite ?
2. Déterminer son expression explicite et les 4 premiers termes de la suite.
3. En justifiant avec les arguments de cours de Première, déterminer le sens de variation de cette suite et son comportement à l'infini.

Partie B :

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $Z_n = (-3) \times (-2)^n$.

1. Déterminer les 5 premiers termes de (Z_n).
2. On considère les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $X_n = Z_{2n}$ et $Y_n = Z_{2n+1}$. Déterminer l'expression explicite des termes de chacune de ces suites et établir le lien qu'elles ont avec (W_n).
3. En utilisant la partie A, déterminer la nature de chacune des suites (X_n) et (Y_n) ainsi que leur comportement à l'infini.
4. Parmi les trois algorithmes suivants :
   l'un détermine le rang à partir duquel $X_n < -10\ 000$ (tâche A),
   un autre détermine le rang à partir duquel $Y_n > 10\ 000$(tâche B),
   le restant ne correspond à aucune de ces tâches.

```
def algo 1() :
    n = 0
    U = 6
    while U >= 10 000 :
        U = U * 4
        n = n+1
    return n
```

```
def algo 2() :
    n = 0
    U = -3
    while U >= -10 000 :
        U = U * 4
        n = n+1
    return n
```

```
def algo 3() :
    n = 0
    U = 6
    while U <= 10 000 :
        U = U * 4
        n = n+1
    return n
```

Sans justification, indiquer quel algorithme correspond à la tâche A et lequel correspond à la tâche B.

5. En faisant tourner les algorithmes adéquats, indiquer le rang trouvé dans chaque cas.
   En déduire le rang à partir duquel $|Z_n| \geq 10\ 000$.
6. Que peut-on en déduire sur la convergence de (Z_n) ?
7. Citer l'argument de cours qui permet de trouver directement cette réponse.

<u>Partie C :</u>

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{6U_n - 10}{U_n - 1} \\ U_0 = \dfrac{17}{4} \end{cases}$.

1. Déterminer les 4 premiers termes de (U_n).
2. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3. On admet que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 5$ et on pose : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 5}$.
   Montrer que (V_n) est géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
4. En déduire l'expression explicite de V_n puis de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Conjecturer la convergence de (U_n).

3. Corrigé

Partie A : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} W_{n+1} = 4W_n \\ W_0 = -3 \end{cases}$

1. Par définition d'une suite géométrique, (W_n) est géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $W_0 = -3$.

2. Son expression explicite est donc $\boxed{W_n = W_0 q^n = -3 \times 4^n}$.

   $W_0 = -3, \qquad W_1 = -12, \qquad W_2 = -48, \qquad W_3 = -196$.

3. (W_n) est une suite géométrique de raison $4 > 1$ et de premier terme $-3 < 0$, donc :

$$\boxed{(W_n) \text{ est décroissante et diverge vers } -\infty}.$$

Partie B : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_n = (-3) \times (-2)^n$

1. Voici les 5 premiers termes de cette suite :
   $Z_0 = -3 \times (-2)^0 = -3 \times 1 = -3 \qquad Z_1 = -3 \times (-2)^1 = 6$
   $Z_2 = -3 \times (-2)^2 = -3 \times 4 = -12 \qquad Z_3 = -3 \times (-2)^3 = 24$
   $Z_4 = -3 \times (-2)^4 = -3 \times 16 = -48$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = Z_{2n}$ et $Y_n = Z_{2n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,
   $X_n = Z_{2n} = (-3) \times (-2)^{2n} = (-3) \times ((-2)^2)^n = -3 \times 4^n = W_n$. $Y_n = Z_{2n+1} = (-3) \times (-2)^{2n+1} = (-3) \times (-2)^{2n} \times (-2) = -2W_n$.

   On a : $\boxed{X_n = W_n \text{ et } Y_n = -2W_n}$.

3. (X_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme -3, elle est décroissante et diverge vers $-\infty$ d'après A.3.
   (Y_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $-2W_0$, $-2 \times (-3) = 6 > 0$; (Y_n) est une suite croissante et diverge vers $+\infty$.
4. L'algorithme 2 effectue la tâche A. L'algorithme 3 effectue la tâche B.
   Erreur courante, dans le while, la condition est le contraire de la condition de l'énoncé. On peut associer $<$ avec $\geq$ et $>$ avec $\leq$.
5. En faisant tourner les algorithmes adéquats, on obtient $\boxed{n = 6}$ dans les deux cas.

   $2 \times 6 = 12$ et $2 \times 6 + 1 = 13$ et $12 < 13$.

   Le premier terme dont la valeur absolue dépasse 10 000 est X_6 c'est-à-dire Z_{12}.

   On en déduit que pour tout $n \geq 12$, $|Z_n| \geq 10\,000$.

6. Les termes de (Z_n) appartenant alternativement à (X_n) et (Y_n) qui sont deux suites de limites différentes, on en déduit que (Z_n) diverge et n'a pas de limite.
7. Dans le cours de Première, on a vu qu'une suite géométrique de raison $q < -1$ n'est pas monotone et diverge sans avoir de limite.

Partie C : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{6U_n - 10}{U_n - 1} \\ U_0 = \dfrac{17}{4} \end{cases}$.

1. En calculant à la main ou par la table de la calculatrice, on a :
$$U_0 = \frac{17}{4}, \qquad U_1 = \frac{62}{13}, \qquad U_2 = \frac{242}{49}, \qquad U_3 = \frac{962}{193}.$$
2. Calculons la différence de deux termes consécutifs :
$$U_1 - U_0 = \frac{27}{52}, \qquad U_2 - U_1 = \frac{108}{637} \qquad \text{et } \frac{27}{52} \neq \frac{108}{637}$$
donc (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

   Calculons le quotient de deux termes consécutifs :
$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{248}{221}, \qquad \frac{U_2}{U_1} = \frac{1573}{1519} \qquad \text{et } \frac{248}{221} \neq \frac{1573}{1519}$$
donc (U_n) n'est pas une suite géométrique.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \neq 5, \quad V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 5}$.
Montrons que (V_n) est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} - 5} = \frac{\dfrac{6U_n - 10}{U_n - 1} - 2}{\dfrac{6U_n - 10}{U_n - 1} - 5} = \frac{6U_n - 10 - 2(U_n - 1)}{6U_n - 10 - 5(U_n - 1)} = \frac{4U_n - 8}{U_n - 5}$$
$$V_{n+1} = \frac{4(U_n - 2)}{U_n - 5} = 4 \times \frac{U_n - 2}{U_n - 5} = 4 \times V_n.$$
(V_n) est une suite géométrique de raison 4. Déterminons le premier terme :
$$V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 - 5} = \frac{\dfrac{17}{4} - 2}{\dfrac{17}{4} - 5} = \frac{\dfrac{17 - 8}{4}}{\dfrac{17 - 20}{4}} = \frac{9}{-3} = -3.$$

$\boxed{(V_n) \text{ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme } -3.}$

Remarque : Les suites (V_n) et (W_n) sont les mêmes suites.

CORRIGÉ

4. On a donc $\boxed{V_n = V_0 q^n = -3 \times 4^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.
   De plus, $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 5}$ donc :
   $V_n U_n - 5V_n = U_n - 2 \quad \Rightarrow U_n(V_n - 1) = 5V_n - 2$ d'où
   $U_n = \dfrac{5V_n - 2}{V_n - 1} = \dfrac{5(-3 \times 4^n) - 2}{-3 \times 4^n - 1} = \dfrac{-15 \times 4^n - 2}{-3 \times 4^n - 1} = \dfrac{15 \times 4^n + 2}{3 \times 4^n + 1}$.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{15 \times 4^n + 2}{3 \times 4^n + 1}.}$$
5. D'après la table de la calculatrice, on conjecture que (U_n) converge vers 5.
   Dès que vous aurez vu les limites de suites, vous pourrez le montrer en commençant par factoriser par 4^n le numérateur et le dénominateur pour lever la forme indéterminée.

4. À avoir à l'œil

Ce problème met en exergue la nécessité de bien connaître son cours de première sur les suites, avec une exactitude des énoncés et une vérification systématique des hypothèses.

Il met aussi en avant l'importance du calcul sur les puissances. Les formules sont connues depuis la quatrième. Il est maintenant demandé une bonne agilité de calcul ; elle est nécessaire pour pouvoir traiter le problème jusqu'au bout.

Enfin, la question C.3 se traite grâce à des fractions à 4 étages. Ces fractions changent de sens selon l'emplacement du signe « = ». Je ne saurais trop vous interpeler sur la nécessité d'être précis dans ces écritures, d'autant plus que le problème met en jeu des $n+1$ en indice, des $+1$ sur la ligne et des n en exposant.
Les feuilles d'examen sont des feuilles à petits carreaux. S'il est confortable et apprenant d'écrire ces calculs sur des feuilles à gros carreaux, il est important de s'entraîner au moins deux fois par mois à écrire sur petits carreaux afin d'acquérir la clarté d'écriture nécessaire.

Problème 2

Suites emmêlées (1)

1. Pré-requis et outils

— La récurrence.

Dans ce problème, la seule notion de terminale requise est la récurrence. Il est cependant nécessaire de se souvenir du comportement à l'infini des suites géométriques.
Principaux outils utiles (qui s'ajoutent à ceux du problème précédent) :

<u>Propriété :</u> Une suite géométrique de raison $q > 1$ diverge vers ∞.
Plus précisément :

— Si le premier terme de la suite est positif, la suite diverge vers $+\infty$.
— Si le premier terme de la suite est négatif, la suite diverge vers $-\infty$.

On retient :

$$\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} U_n = \text{signe de } U_0 \ \infty.$$

<u>Propriété :</u> Une suite géométrique de raison $q \in]-1;1[$ converge vers 0.

$$\text{Si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$$

<u>Propriété :</u> Une suite géométrique de raison $q < -1$ diverge et n'a pas de limite.

<u>Remarque :</u> Dans un raisonnement par récurrence :

— Il est nécessaire d'initialiser le procédé, et de le faire clairement.
— Il est nécessaire de supposer VRAIE l'hypothèse de récurrence pour **un entier** k et de prouver qu'alors la relation de récurrence est héréditaire.
— Il est nécessaire de conclure **pour tout** n.
— Il n'est pas nécessaire de « dégager l'étape de l'hypothèse de récurrence ». En le faisant, on donne de la visibilité à cette étape, on ne l'oublie pas.

2. Énoncé

On considère les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n - V_n & U_0 = 4 \\ V_{n+1} = -2U_n + 2V_n & V_0 = -1 \end{cases}.$$

<u>Partie A :</u>

1. Déterminer U_1, U_2, U_3 ainsi que V_1, V_2 et V_3.
2. Ces suites sont-elles arithmétiques ? Géométriques ?
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$U_n + V_n = 3.$$

4. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 4U_n - 3.$$

5. On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = U_n - 1$.
   (a) Montrer que (W_n) est géométrique. *On précisera sa raison et son premier terme.*
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) Justifier que pour tout entier n, $V_n = 2 - 3 \times 4^n$.
6. Déterminer les limites de (U_n) et (V_n).

<u>Partie B :</u>

1. Parmi les algorithmes suivants, lesquels affichent le terme V_n où n est entré par l'utilisateur ?
   Justifier les éliminations.

```
def terme1(n) :
    V = −1
    for i in range(n) :
        V = 2 − 3 × 4^i
    return V
```

```
def terme2(n) :
    i = 0
    V = −1
    while i <=n :
        V = 2 − 3 × 4^i
        i = i+1
    return V
```