L'ESSENTIEL
POUR PROGRESSER

Les mathématiques au lycée

2de

ellipses

1
Nombres et calculs

I. Les types de nombres

a. Les ensembles de nombres remarquables

Notation

Pour décrire certains ensembles, on peut écrire la liste de leurs éléments entre 2 accolades.

Rappel :

$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 \qquad 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

Définitions

Les ensembles de nombres remarquables sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**. On a donc : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**. On a donc :

$\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**.

Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier par 10^k, où k est un entier naturel.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**.

Les nombres rationnels sont les nombres qui s'écrivent comme quotient de 2 entiers relatifs.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**.

Les nombres réels sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée. Une telle droite s'appelle droite des réels.

En seconde et en première, tous les nombres que l'on manipule sont des réels.

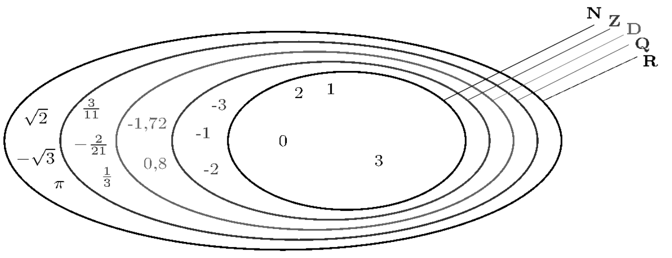
Propriété

Les ensembles de nombres précédents sont inclus (contenus) les uns dans les autres.

$\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Représentation par un diagramme de Venn



Par exemple, 1,72 n'est ni un entier naturel, ni un entier relatif, mais c'est un décimal, et donc un rationnel et un réel.

b. La nature des nombres

Définition

La **nature d'un nombre** est liée au plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient.

Définition

Un **irrationnel** est un nombre réel qui n'est pas rationnel.
Par exemple, $\sqrt{2}$ et π sont des irrationnels.

Propriété 1

Un nombre est décimal si et seulement si il admet une écriture décimale limitée.

Propriété 2

Cette propriété, à la limite du programme, est destinée aux « experts » !
Un **nombre rationnel** non nul écrit sous la forme d'une fraction **irréductible** d'entiers $\frac{p}{q}$ (avec q entier naturel) n'est pas un **nombre décimal** si et seulement si la décomposition de q en produit de nombres premiers ne peut pas s'écrire sous la forme $2^m \times 5^n$ (avec m et n entiers naturels).

Propriété 3

Un nombre rationnel n'est pas décimal si et seulement si il est impossible de l'écrire sous forme décimale avec un nombre fini de décimales.
*Le caractère non décimal d'un nombre peut donc se **conjecturer** à l'aide d'une calculatrice, mais on rappelle qu'une conjecture n'est qu'une hypothèse!*

Propriété 4

Si un **entier naturel** n'est pas un carré d'entier, alors sa racine carrée est un nombre **irrationnel**.

Propriété 5

Un nombre réel est irrationnel si et seulement si son développement décimal illimité n'est pas périodique.
*Le caractère irrationnel d'un nombre peut donc se **conjecturer** à l'aide d'une calculatrice, mais on rappelle qu'une conjecture n'est qu'une hypothèse!*

À retenir
La nature d'un nombre est évidente s'il s'agit d'un entier naturel ou d'un entier relatif.
Elle est facile à déterminer s'il s'agit d'un nombre décimal (par sa définition ou grâce à la propriété 1).
La nature d'un rationnel se conjecture à l'aide de la propriété 3, et se prouve à l'aide de la propriété 2.
La nature d'un irrationnel se conjecture à l'aide de la propriété 5. Par contre, pour prouver qu'un réel est irrationnel, c'est moins évident, excepté si l'on peut appliquer la propriété 4.

II. Intervalles. Encadrements décimaux

Définition 1

Un **intervalle** réel est un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant une **borne inférieure** et une **borne supérieure**. Un intervalle contient tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.
Soient a et b deux réels avec $a < b$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'intervalle noté $[\ a\ ;b\ ]$
L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle noté $]\ a\ ;b\ [$
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est l'intervalle noté $[\ a\ ;b\ [$
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est l'intervalle noté $]\ a\ ;b\ ]$
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est l'intervalle noté $[\ a\ ;+\infty\ [$
L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle noté $]\ a\ ;+\infty\ [$
L'ensemble des réels x tels que $x \leq b$ est l'intervalle noté $]-\infty\ ;b\ ]$
L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle noté $]-\infty\ ;b\ [$
Aux 8 types d'intervalles précédents s'ajoute l'intervalle particulier suivant :
l'ensemble vide, qui ne contient aucun nombre, et qui est noté $\emptyset$
On notera les intervalles particuliers que sont :

- les singletons du type $\{a\} = [\,a\,;a\,]$
- l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

Définition 2

Les 4 premiers types d'intervalles de la définition 1 ont pour **longueur** $b-a$.
Un singleton a une longueur nulle.

Définition 3

Soient I et J deux intervalles.
La **réunion de I et de J**, notée $\boxed{I \cup J}$, est l'ensemble des réels appartenant à I, ou à J, ou à I et à J à la fois.
L'**intersection de I et de J**, notée $\boxed{I \cap J}$, est l'ensemble des réels appartenant à I et à J à la fois.

Attention ! Ne pas confondre réunion et intersection ! L'intersection de deux ensembles doit être incluse dans leur réunion.

Les experts peuvent retenir les notations suivantes :
$[0;+\infty[= \mathbb{R}_+$ et $]-\infty;0] = \mathbb{R}_-$
$]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et $]-\infty;0[= \mathbb{R}_-^*$ et $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}^*$

Définition 4

Donner un **encadrement décimal** d'un réel x, c'est donner 2 nombres **décimaux** a et b tels que $\boxed{a \leq x \leq b}$.
Le nombre $b-a$ est appelé **amplitude** de l'encadrement.
Un encadrement est à 10^{-n} près (où n est un entier) si son amplitude vaut 10^{-n}.

La connaissance des intervalles est essentielle pour la résolution des inéquations!

III. Valeur absolue

Définition 1

Soient a et b deux réels. La **valeur absolue** de $b-a$, notée $|b-a|$, est la **distance entre les nombres** b et a lorsqu'ils sont situés sur la droite des réels.

Propriété 1

Pour tous réels a et b, on a : $\boxed{|b-a| = |a-b|}$

Propriété 2

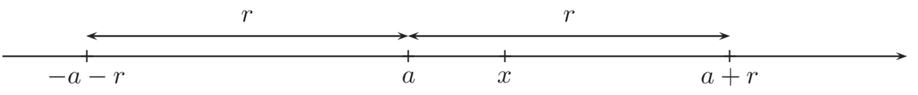
Si a est un nombre réel, alors $|a|$ est la distance entre a et 0.

Si $a \geq 0$, alors $|a| = a$. Si $a \leq 0$, alors $|a| = -a$.

Propriété 3

Soit a un réel quelconque et r un réel strictement positif.

$\boxed{x \in [a-r\,;a+r] \quad \Leftrightarrow \quad a-r \leq x \leq a+r \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| \leq r}$



IV. Arithmétique

Définition 1

Soient n et m deux entiers relatifs.

n est un **multiple** de m si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $n = k \times m$

Définition 2

Soient n et m deux entiers relatifs.

m est un **diviseur** de n si et seulement n est un multiple de m.

Propriété 1

Soient n et m deux entiers relatifs.

m est un diviseur de n si et seulement le **reste** de la **division euclidienne** de n par m vaut 0.

Définition 3

Un entier naturel n est **pair** si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$ (c'est un multiple de 2).

Un entier naturel n est **impair** si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$ (ce n'est pas un multiple de 2).

Propriété 2

Un entier naturel est soit pair, soit impair.

Définition 4

Un entier naturel est un **nombre premier** si et seulement si il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui même.

Propriété 3

Les 10 premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Propriété 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si aucun des nombres premiers inférieur ou égaux à $\sqrt{n}$ n'est un diviseur de n, alors n est un **nombre premier**.

Propriété 5

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit :
- soit comme une puissance d'un nombre premier,
- soit comme produit de puissances de nombres premiers.

Cette **décomposition en produit de nombres premiers** est unique, à l'ordre des facteurs près.

Propriété 6

Tout rationnel admet une écriture sous forme de **fraction irréductible**, c'est-à-dire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers ayant pour seuls diviseurs communs 1 et -1.
Cette écriture s'obtient facilement en décomposant numérateurs et dénominateurs en produits de nombres premiers.

V. Calcul littéral

Propriété 1

Soient a et b deux réels (si besoin non nuls), et m et n deux entiers relatifs.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Définition 1

Soit a un nombre réel positif.
Le nombre positif dont le carré est a s'appelle la **racine carrée** de a et se note $\sqrt{a}$.
Remarque : Si a est un nombre réel positif, alors : $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$ (par définition)

Propriété 2

Soit a un nombre réel quelconque. On a alors l'égalité : $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

Propriété 3

Pour tous nombres a et b positifs, on a : $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}}$
Pour tout nombre a positif et tout nombre b strictement positif, on a : $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a : $\boxed{\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}}$

Propriété 4

Soient a et b deux réels. On a alors les trois **identités remarquables** suivantes.

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

$\boxed{(a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2}$

Le passage du membre de gauche à celui de droite est un **développement**.
Le passage du membre de droite à celui de gauche est une **factorisation**.

Définition 2

Factoriser consiste à écrire une somme algébrique sous forme d'un produit.
Développer consiste à écrire un produit algébrique sous forme d'une somme.

Méthode pour factoriser (en seconde)
Chercher un facteur commun. S'il n'y en n'a pas, utiliser une identité remarquable. Si rien ne fonctionne, c'est que la factorisation a été donnée auparavant !
Savoir factoriser est essentiel pour la résolution de certaines équations et inéquations.

Exercices corrigés

Exercice 1

1. *Aucune justification n'est demandée dans cette question.*
On considère les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
À quel(s) ensemble(s) appartient chacun des nombres suivants :
a. -3 **b.** 1,32 **c.** $\sqrt{7}$ **d.** $\frac{-3}{11}$ **e.** $\frac{13}{2}$ **f.** π **g.** $\frac{\sqrt{16}}{2}$

2. On rappelle que la nature d'un nombre est liée au plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, D, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient.
Donner la nature de chacun des nombres suivants :
a. 0 **b.** 8,573 **c.** $\sqrt{81}$ **d.** $\frac{1}{4}$ **e.** $\frac{1}{3}$ **f.** $\sqrt{12}$ **g.** $-\frac{3}{4}$ **h.** $\frac{7}{150}$

3. Donner la nature de chacun des nombres suivants :
$a = \frac{3}{7} - \frac{2}{3}$ $b = -8 \times 0,125$ $c = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3}$
$d = \sqrt{6} \times \sqrt{0,0864}$ $e = 1 - \frac{1}{3}$

4. Donner la nature de chacun des nombres suivants :
$a = \left(\sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$ $b = \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{6}}$

5. On pose : $x = \frac{231}{60 \times 10^{100}}$
En revenant à la définition d'un nombre décimal, montrer que le nombre x est décimal.

6.a. À l'aide de votre calculatrice, déterminer la valeur de $a = 1,000001 \times 0,999999$.
6.b. Quelle semble être la nature du nombre a ?
6.c. Effectuer le produit donnant a à la main et donner la nature exacte de a.
6.d. Retrouver rapidement le résultat précédent en écrivant le produit a sous la forme $a = (1 + 0,000001) \times (1 - 0,000001)$

Corrigé

1. On rappelle que les ensembles de nombres remarquables sont inclus les uns dans les autres. Ainsi, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Les justifications proposées ci-dessous n'étaient pas exigibles.
a. $-3 \in \mathbb{Z}$ $-3 \in \mathrm{D}$ $-3 \in \mathbb{Q}$ $-3 \in \mathbb{R}$
b. $1,32 \in \mathbb{D}$ $1,32 \in \mathbb{Q}$ $1,32 \in \mathbb{R}$