ECG
2e année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES INFORMATIQUE

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

UN MATHÉMATICIEN

Georg Frobenius (1849-1917) effectue ses études dans les universités de Göttingen puis de Berlin où il suit les cours des plus grands mathématiciens allemands de l'époque comme Kronecker, Kummer et Weietrsrass. Par la suite, il enseigne dans cette même ville puis à l'École polytechnique de Zurich.

Les travaux de Frobenius en algèbre linéaire ont justifié et généralisé plusieurs résultats effleurés par ses prédécesseurs, en particulier sur le polynôme caractéristique.

Un peu d'histoire

Dans la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle, différents mathématiciens ont manipulé les coefficients de systèmes d'équations linéaires, comme Bézout, Vandermonde et même Lagrange. En l'absence de notation sous forme de tableau, on aboutissait à des calculs lourds mais ces mathématiciens avaient compris l'intérêt du déterminant.

Ce n'est cependant qu'en 1850 que le mathématicien anglais James Sylvester introduit, sous le nom de matrice, un tableau de nombres dont les éléments représentent des coordonnées des images de vecteur d'une base par une application linéaire. Son compatriote Arthur Cayley définit, peu après, les opérations d'addition et de multiplication, les traitant ainsi comme des nombres et non des tableaux de nombres. Il démontre en dimension 2 et 3 le théorème de Cayley-Hamilton ; Frobenius donnera une preuve générale en 1878.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Connaître la définition d'une matrice de passage et les formules de changement de bases.

▷ Connaître la définition et les propriétés de la trace d'une matrice.

▷ Connaître la définition de deux matrices semblables.

▷ Connaître la définition de la somme de r sous-espaces vectoriels.

■ Et plus si affinités

▷ Savoir montrer qu'une somme de r sous-espaces est directe.

Résumé de cours

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension n (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Somme de r sous-espaces vectoriels

Ce paragraphe généralise les notions vues au **chapitre 21** du **tome 1** à une somme de r sous-espaces vectoriels.

Somme

Définition 1.1. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle *somme* de F_1, F_2, ..., F_r, l'ensemble noté $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$ défini par :

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_r = \left\{ x_1 + x_2 + \ldots + x_r, \left(x_1, x_2, \ldots, x_r \right) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_r \right\}.$$

Théorème 1.1. — La somme de r sous-espaces de E est un sous-espace vectoriel de E.

Somme et somme directe

Définition 1.2. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_r$ est *directe* si pour tout vecteur x de F, il existe un unique r-uplet $\left(x_1, x_2, \ldots, x_r \right)$ de $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_r$ tel que :

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$$

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 1.2. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$ est directe si, et seulement si, pour tout r-uplet $\left(x_1, \ldots, x_r \right)$ de $F_1 \times \ldots \times F_r$, on a l'implication : $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ x_i = 0_E$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer qu'une somme de *r* sous-espaces est directe ?**

Remarque 1.1. — Il ne faut pas oublier le cas particulier $r = 2$ pour lequel on a vu dans le **tome 1** le résultat suivant : la somme $F_1 + F_2$ est directe si, et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \left\{ 0_E \right\}$.

Définition 1.3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.

- On dit que E est *somme* de F_1, F_2, ..., F_r si $E = F_1 + F_2 + ... + F_r$.
- On dit que E est *somme directe* de F_1, F_2, ..., F_r si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 1.3. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme de *r* sous-espaces?**

Théorème 1.4. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un *unique* r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

Théorème 1.5. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_r$.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, la famille obtenue par *concaténation* (c'est-à-dire juxtaposition) des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_r$ est une base de E.

Théorème 1.6. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels de E.
E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si :

$$E = F_1 + F_2 + ... + F_r \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \dim F_i = \dim E$$

En d'autres termes, E est somme directe de F_1, F_2, ..., F_r si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
- $\dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_r = \dim E$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de *r* sous-espaces?**

■ Changement de bases

❑ Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.4. — On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p\in\mathbb{N}^*$). On appelle *matrice de la famille* $\mathcal{F}$ *dans la base* $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la j^{e} colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.2. — Soit x un vecteur de E et $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées du vecteur x dans une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Propriété 1.1. — Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ une famille de n vecteurs de E. La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est une base de E.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer matriciellement qu'une famille est une base ?**

❑ Matrice de passage

Définition 1.5. — On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 1.2. — Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

❑ Formules de changement de bases

Théorème 1.7. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout vecteur x de E, on note X (respectivement X') la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $X=PX'$.

Définition 1.6. — (Rappel) Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Si f est un endomorphisme de E, on appelle *matrice de f relativement à la base* $\mathcal{B}$ (ou *dans la base* $\mathcal{B}$) la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, dont la j^{e} colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème 1.8. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout endomorphisme f de E, on note A (respectivement A') la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $A'=P^{-1}AP$.

❑ Matrices semblables

Définition 1.7. — Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, et telle que : $A' = P^{-1}AP$.

Théorème 1.9. — Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes ou non (dans ce dernier cas, les matrices sont égales et on a $P = I$).

■ Trace d'une matrice carrée

❑ Définition

Définition 1.8. — Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,\, j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de A, le réel noté $\mathrm{Tr}(A)$, égal à la somme des éléments diagonaux de A. On a donc : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque 1.3. — La trace d'une matrice n'a de sens que si la matrice est carrée.

❑ Linéarité de la trace

Propriété 1.3. — L'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A)$

❑ Trace d'un produit

Propriété 1.4. — Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(M\,N) = \mathrm{Tr}(N\,M)$$

❑ Invariance de la trace par similitude

Propriété 1.5. — Deux matrices semblables ont même trace. Autrement dit, si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$$

Méthodes

Somme de sous-espaces

❑ Méthode 1.1. Comment montrer qu'une somme de *r* sous-espaces est directe ?

Pour montrer que la somme de trois sous-espaces F_1, F_2 et F_3 est directe, on montre que : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
La généralisation à r sous-espaces se fait sans difficulté : la somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si, on a :
$\forall (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r,\ x_1 + x_2 + ... + x_r = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ x_i = 0_E$.

⇨ **Exercice 1.5**

Exemple. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$, on donne :
$F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(-x)\}$.
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$.
$H = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$.
Montrer que la somme de *F*, *G* et *H* est directe.

Soit P_1, P_2, P_3 des vecteurs appartenant respectivement à *F*, *G* et *H* tels que $P_1 + P_2 + P_3 = 0$.
En évaluant cette égalité en 1 puis en 2, on obtient : $P_1(1) = P_1(2) = 0$.
Comme P_1 appartient à *F*, on a donc aussi : $P_1(-1) = P_1(-2) = 0$.
Le polynôme P_1 de $\mathbb{R}_3[x]$, possède au moins 4 racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.
Puisque P_1 est nul, il ne reste plus que l'égalité $P_2 + P_3 = 0$ et, en l'évaluant en 0 puis en 3, on trouve : $P_3(0) = 0$ et $P_2(3) = 0$.
Les polynômes P_2 et P_3 ont donc eux aussi au moins 4 racines distinctes (0, 1, 2 et 3) donc ils sont nuls.
Finalement, on a : $P_1 = P_2 = P_3 = 0$.
La somme $F + G + H$ est directe et on peut donc la noter $F \oplus G \oplus H$.

❑ Méthode 1.2. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme de *r* sous-espaces ?

Pour montrer qu'un espace E est la somme de r sous-espaces F_1, F_2 …, F_r, il suffit de prouver que :
$\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

⇨ Exercice 1.7

Exemple.
Pour tout entier naturel k de $[\![1,n]\!]$, on note A_k le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont toutes les colonnes sauf la k-ième sont nulles.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 + A_2 + ... + A_n$.
Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En considérant, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, les matrices M_k dont les colonnes sont nulles, sauf la k-ième qui est égale à la k-ième colonne de M.
On a, par construction, $M = M_1 + ... + M_n$, et comme chaque matrice M_k appartient à A_k, on obtient bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de *r* sous-espaces ?

Pour montrer qu'un espace E est somme directe de r sous-espaces F_1, F_2 …, F_r, il y a trois méthodes :

- On montre qu'on obtient une base de E en concaténant des bases de F_1, …, F_r.
- On montre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
  ❶ $\forall x \in E$, $\exists (x_1, x_2, ..., x_r) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
  ❷ $\dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_r = \dim E$.
- On montre (par analyse-synthèse), que pour tout vecteur x de E, il existe un unique r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$ (voir l'**exercice 1.6**).

Remarque. Lorsque $r = 2$, relire le **chapitre 21** du **tome 1** et voir l'**exercice 1.4**.

⇨ Exercice 1.7

Exemple. On reprend l'exemple précédent.
Pour tout entier naturel k de $[\![1,n]\!]$, on note A_k le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont toutes les colonnes sauf la k-ième sont nulles.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$.