Thierry Meyer

Prépa à la prépa

Physique et mathématiques appliquées à la physique

62 thèmes incontournables et d'approfondissement
pour le futur étudiant en prépa

ellipses

THEME 4 : NOTIONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE UTILE EN PHYSIQUE

L'analyse fonctionnelle est au cœur de toute théorie physique. Toute grandeur physique apparaît souvent comme fonction d'une autre variable. On peut par exemple étudier la température de l'air en fonction de l'altitude, la vitesse d'un train en fonction du temps, le pH d'une solution en fonction du volume versé lors d'un titrage. On se propose dans ce thème $N°4$ de nous focaliser sur les connaissances minimales que doit avoir un bachelier entrant en prépa, sur les fonctions à une variable.

1 Généralités sur les fonctions réelles en physique

On se restreindra à l'ensemble des réels. Il existe également en physique des fonctions de la variable complexe, nous aurons l'occasion d'y revenir.

1.1 Définition

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, on appelle fonction f toute correspondance de A dans B qui associe à un élément x de A, un et un seul élément y de B : $y = f(x)$. Le réel y est appelé image de x, et x est un antécédent de y .

La notion de fonction peut se généraliser à tout ensemble de départ et d'arrivée. On peut par exemple considérer la fonction qui, à un étudiant de prépa associe le lycée de sa terminale. Chaque étudiant n'a qu'une seule image mais un même lycée peut avoir plusieurs étudiants antécédents.

1.2 Domaine de définition d'une fonction

On appelle domaine de définition d'une fonction et l'on note D_f, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. Si l'ensemble de définition se confond avec l'ensemble de départ A la fonction est appelée une application. Une application fait donc correspondre à tout élément de l'ensemble de départ un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée. Il est d'usage en physique de considérer que l'ensemble de départ est confondu avec l'ensemble de définition et d'appeler fonction une application.

1.3 Application surjective, injective ou bijective

1.3.1 Surjection

Une application est dite surjective si tout élément de l'ensemble B d'arrivée a au moins un antécédent.

Exemples : La fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x + 1$ est trivialement surjective puisque tout réel y admet un antécédent dans $\mathbb{R}$, qui est : $x = y - 1$

La fonction g polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $g(x) = x^2$ n'est pas une fonction surjective puisque les réels négatifs n'ont pas d'antécédent.

En revanche, la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $h(x) = x^2$ est surjective puisque l'ensemble d'arrivée est cette fois-ci constitué des réels positifs. Chaque réel positif de l'ensemble d'arrivée a alors deux antécédents : $\pm\sqrt{x}$.

1.3.2 Injection

Une application est dite injective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent ou de manière équivalente : $\forall(x_1, x_2) \in A \times A, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

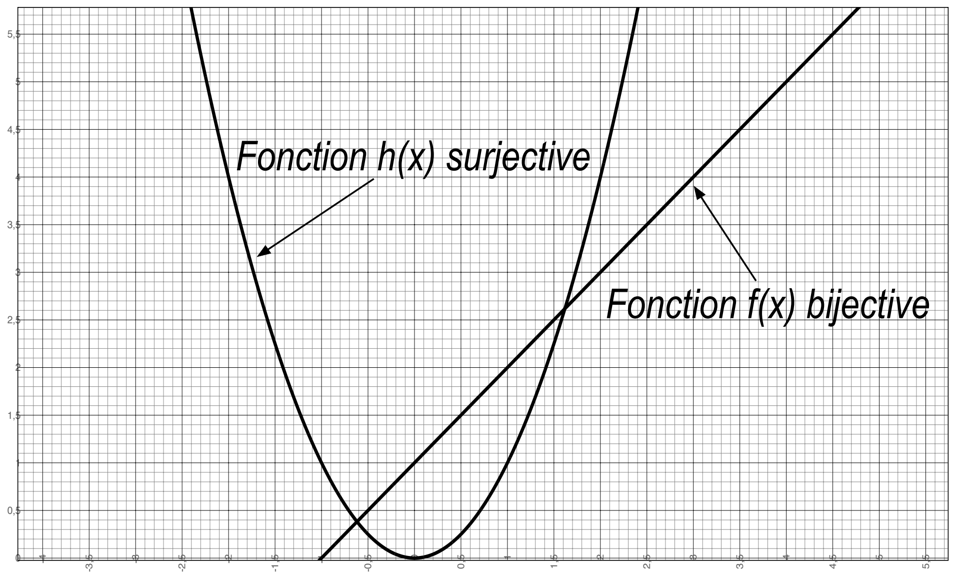
Exemples : La fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x + 1$ est trivialement injective puisque : $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Longrightarrow x_1 = x_2$.

La fonction polynomiale g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $g(x) = x^2$ n'est pas une fonction injective puisque $g(x) = g(-x)$. En revanche, la fonction k définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^2$est injective puisque l'ensemble de départ est cette fois-ci constitué des réels positifs.

1.3.3 Bijection

Une application est bijective ou constitue une bijection si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. Cela suppose évidemment que tout élément de son ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Exemples : La fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x + 1$ est trivialement injective et surjective, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction polynomiale l de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}^+$qui à x associe $l(x) = x^2$ est trivialement injective et surjective. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}^+$.



2 Fonctions composées et fonction réciproque d'une fonction bijective

On se restreindra aux fonctions définies dans un intervalle réel I vers un intervalle des réels J.

2.1 Définition

On considère une fonction f de I dans J qui, à un élément x de l'ensemble de départ I associe un élément $y = f(x)$ de l'ensemble J d'arrivée et une fonction g de J dans K qui, à un élément y de l'ensemble de départ J associe un élément $z = g(y)$ de l'ensemble K d'arrivée. Le domaine de définition de la fonction g sera supposé contenu dans l'espace image de la première fonction.

On définit la fonction composée de f et de g : $h = gof$ comme fonction de I dans K qui, à une variable x de l'espace objet I associe un élément de l'espace image de g.

La fonction composée est alors définie selon :

$$h(x) = g(y) = g(f(x))$$

On peut par exemple composer les deux fonctions suivantes :

$$\text{Soient : } f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,+1] \\ y \mapsto g(y) = siny \end{cases}$$

On obtient alors par composition :

$$gof : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-1,+1] \\ x \mapsto gof(x) = sin\sqrt{x} \end{cases}$$

2.2 Fonction réciproque d'une fonction bijective

2.2.1 Définition

La bijection réciproque d'une bijection f est l'application qui à chaque élément de l'ensemble d'arrivée J associe son unique antécédent dans I. De manière plus rigoureuse, nous pouvons définir l'application réciproque de f de la manière suivante : si f est une application de l'ensemble I vers un ensemble J et s'il existe une application de J vers I telle que :

$$gof = Id_I \text{ et } fog = Id_J$$

La fonction Id est la fonction identité qui transforme un élément en lui-même. La fonction g est appelée bijection réciproque de f. La réciproque est souvent notée $g = f^{-1}$. Il convient toutefois avec cette notation de ne pas la confondre avec l'inverse de la fonction f.

2.2.2 Exemples

$$\text{Soient : } f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_1(x) = x^3 \end{cases} \text{ et } f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Dans leurs intervalles respectifs de définitions, ces deux fonctions sont trivialement bijectives. La réciproque de la première est appelée racine cubique de x alors pour que la seconde il s'agit de la racine carrée. Considérons maintenant la fonction :

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Il est à noter que cette fonction n'est pas une fonction bijective. En effet, tout élément de l'ensemble d'arrivée possède deux antécédents : $\pm\sqrt{x}$! On notera donc l'importance du domaine de définition de la fonction.

3 Continuité d'une fonction

3.1 Continuité et inertie en physique

La notion de continuité joue un rôle essentiel en physique. C'est notamment le cas lors du changement d'état physique d'un système, qu'il soit mécanique, électrique ou thermodynamique. La continuité est alors responsable de l'inertie du système physique. Du fait de l'inertie mécanique, une vitesse ne peut varier instantanément ; de la même façon, une température ne peut varier brusquement du fait de l'inertie thermique. Un condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes et une bobine celle de l'intensité électrique, ce sera l'inertie électrique.

3.2 La continuité en mathématique

Afin de définir la continuité en mathématique, il nous faut tout d'abord définir la notion de limite.

3.2.1 Limite finie en un point

Une fonction f a une limite l en $x = a$, si tout intervalle ouvert au voisinage de l ,contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x au voisinage de a, c'est-à-dire pour $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. Certaines fonctions peuvent admettre en certains points une limite à droite distincte de la limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière de x notée $E(x)$.

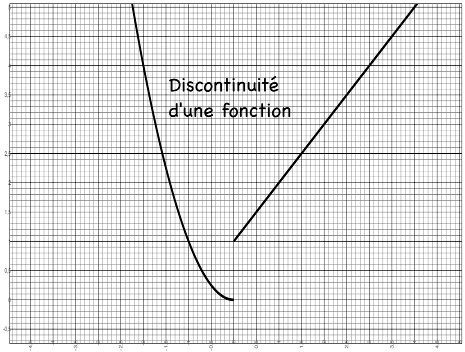
3.2.2 Continuité en un point et sur un intervalle d'une fonction

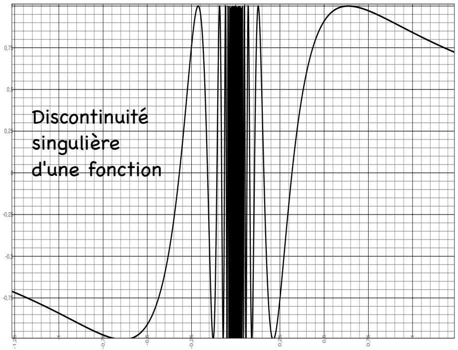
Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant a est continue en a si et seulement si :

$$lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est dite continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

3.2.3 Discontinuités physiques et les discontinuités singulières mathématiques





Les discontinuités rencontrées en physiques correspondent pour l'essentiel à un « décrochage » de la fonction en un point. C'est le cas de la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. On dit naïvement en physique qu'une fonction est continue si on peut la tracer sans avoir à lever son crayon. En mathématique, on rencontre des cas moins élémentaires de discontinuités. On peut l'illustrer avec la fonction définie de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \mapsto f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction oscille de manière de plus en plus rapide au voisinage de 0 où elle s'annule une infinité de fois pour $x_n = 1/n\pi$ où n est un entier relatif non nul. Les zéros de la fonction se rapprochent donc au voisinage de $x = 0$ et celle-ci oscille cependant entre -1 et $+1$ entre chaque zéro de la fonction. La fonction f n'admet donc pas de limite en 0.

4 Dérivée et étude d'une fonction sur son domaine de définition

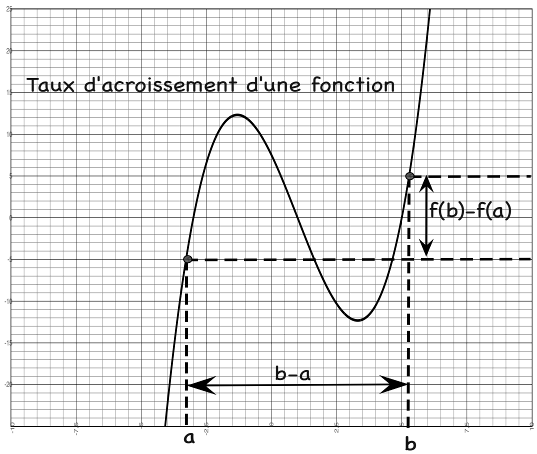
4.1 Accroissement d'une fonction

Soit f une fonction de la variable x, on appelle accroissement de la fonction f entre les valeurs $x = a$ et $x = b$ où $b > a$, la quantité notée Δf en physique et telle que : $\Delta f = f(b) - f(a)$

On parle en physique d'un accroissement absolu. Le taux d'accroissement de la variable x entre les valeurs $x = a$ et $x = b$ est la quantité : $\Delta x = b - a$

On appelle alors taux d'accroissement relatif de la fonction entre a et b : la quantité γ définie par :

$$\gamma = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



On notera que si la fonction a crû entre a et b alors $\gamma > 0$. Toutefois entre les deux points où elle a crû, elle a pu subir des oscillations.

On souhaiterait donc avoir une approche locale du taux d'accroissement, c'est le fondement physique de la notion de dérivée.

4.2 Approche physique de la dérivabilité

- On appelle valeur de la fonction dérivée d'une fonction f au point x, la limite lorsqu'elle existe du taux d'accroissement relatif de la fonction au voisinage du point x soit :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right], \text{notée en physique : } f'(x) = \frac{df}{dx}$$

- Les grandeurs physiques que nous étudierons seront au moins continues et dérivables sur leur intervalle de définition. On notera de manière classique en physique, et au voisinage de x :

$$df(x) = f'(x)dx$$

Ce que nous interprétons physiquement de la manière suivante : une petite variation de f autour d'une valeur donnée x est égale à la dérivée de f calculée en x multipliée par la petite variation de x.
En réalité df qui est une différentielle est une forme linéaire de h au voisinage du point d'étude.
Par exemple, si la valeur de la fonction dérivée vaut $+3$ en un point donné $x = 2$, cela veut dire que autour de ce point $x = 2$, la fonction varie 3 fois plus vite que sa variable dans le même sens de croissance.

4.3 Dérivée d'une fonction composée

Si l'on adopte le formalisme simpliste des physiciens quant à la dérivée, cela permet une formulation de la dérivation d'une fonction composée assez naturelle et qui se retient assez facilement. Soit $f[y(x)]$ une fonction composée, on aura pour la dérivation composée :

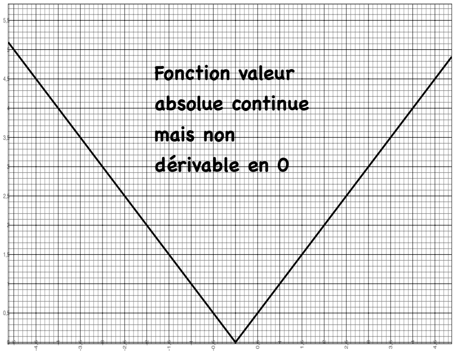
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}$$

C'est la formulation utilisée en physique pour dériver une fonction composée. La formulation mathématique plus rigoureuse est souvent lourde d'emploi en science physique et guère utilisée.

Exemple : $f[y(x)] = \sin(y(x))$ où $y = x^2$ sera simplement notée : $f(x) = sin\,(x^2)$

$$\text{On a alors : } \frac{df}{dx} = \cos(y)\,.\,2x = 2x\cos(x^2)$$

4.4 Résultats généraux admis sur la continuité et la dérivabilité utiles en physique



- Une fonction dérivable en un point est forcément continue en ce point. La réciproque est évidemment fausse.
- La fonction valeur absolue définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto f(x) = |x| \text{ où } |x| = \sup\,(x, -x) \end{cases}$$

est une fonction continue en $x = 0$ mais elle n'est pas dérivable en ce point.

- Une fonction continue et monotone sur un intervalle de définition est bijective sur cet intervalle.

- Les quatre opérations de base sur des fonctions continues redonnent des fonctions continues. Les fonctions polynomiales, sinusoïdales, rationnelles, exponentielles et logarithmiques sont des fonctions continues sur leurs intervalles de définition.

- Si une fonction définie sur un intervalle I a une dérivée strictement positive respectivement strictement négative alors elle est croissante respectivement décroissante sur cet intervalle.

- Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point et change de signe en ce point**,** alors cette fonction présente en ce point un extremum local. Si la dérivée est positive à gauche et négative à droite, on a un maximum. On a un minimum dans le cas contraire. Dans le cas d'un maximum, la fonction dérivée seconde est positive en ce point, elle est négative dans le cas d'un minimum.

- Si la dérivée seconde existe, s'annule et change de signe en un point, on a alors une inflexion en ce point et la courbe traverse sa tangente.

4.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [x_1, x_2]$, alors, pour tout réel $k \in [f(x_1), f(x_2)]$, il existe au moins un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

4.6 Approximation d'une fonction dérivable au voisinage d'un point

Pour une fonction dérivable en un point x_0, on définit une droite tangente à la courbe dont le coefficient directeur est la dérivée de la fonction au point x_0, et qui passe par le point de coordonnées $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

L'équation de cette droite dans le plan affine (Oxy) est donc trivialement :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

En physique, il est d'usage d'approximer la fonction au voisinage de x_0 simplement par la droite tangente à la courbe. En mathématiques, on écrira de façon rigoureuse :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\,f'(x_0)+h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h)\longrightarrow 0 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

On parle de linéarisation ou de développement limité (DL) au premier ordre en h de la fonction au voisinage de x_0. Bachmann et Landau note $o(h)$ (lu « petit tau de h ») le terme négligeable devant h : $h\varepsilon(h)$.

On utilise couramment en physique les DL suivants au premier ordre et au voisinage de 0 :

$$sinx=x+o(x)\ ;\ tanx=x+o(x)\ ;(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x) \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}$$

Par ailleurs, on aura au second ordre en x : $cosx=1-x^2/2+o(x^2)$

4.7 Règles de dérivation

On a les règles suivantes et admises de dérivation qu'un étudiant en classes préparatoires doit connaître par cœur.

Dérivée d'une somme de fonctions	$(f+g)'=f'+g'$
Dérivée du produit par un scalaire	$\forall\alpha\in\mathbb{R}\,,(\alpha f)'=\alpha f'$
Dérivée d'un produit	$(fg)'=f'g+fg'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
Dérivée de la puissance	$\forall\alpha\in\mathbb{R}\,,(f^{\alpha})'=\alpha f^{\alpha-1}f'$
Dérivée de la composée	$(gof)'=(g'of)f'$

4.8 Dérivées des fonctions usuelles où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Fonction	Domaine de définition de f	Dérivée	Domaine de définition de la fonction dérivée
$f(x)=\alpha$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\alpha x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\alpha$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Fonction $f(x)$	**Domaine de définition de f**	**Dérivée** $f'(x)$	**Domaine de définition de la fonction dérivée**
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}/\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sin(\alpha x+\beta)$	$\mathbb{R}$	$\alpha\cos(\alpha x+\beta)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\alpha x+\beta)$	$\mathbb{R}$	$-\alpha\sin(\alpha x+\beta)$	$\mathbb{R}$
$\tan(\alpha x+\beta)$	$\mathbb{R}$	$\alpha[1+tan^2(\alpha x+\beta)]$ $\frac{\alpha}{cos^2(\alpha x+\beta)}$	$\mathbb{R}$

5 Notion de dérivée logarithmique

La dérivée logarithmique est très utilisée en physique, en particulier dans la recherche d'extrema de fonctions.

5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I des réels, ne s'annulant pas sur cet intervalle et dérivable en tout point.

On appelle dérivée logarithmique de f, $\mathcal{L}(f)=f'/f=dln|f|/dx$ notée aussi $Dlnf$.