PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique PC/PC*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL
Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Régis BOURDIN
Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)

Ludovic MENGUY
Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)

Vincent PARMENTIER
Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Alban SAURET
Professeur à l'université de Californie (Santa Barbara, États-Unis)

Marc VENTURI
Professeur au lycée Kléber (Strasbourg)

Sylvie ZANIER
Enseignante à l'université J. Fourier (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Un grand merci à Frédéric Barbosa pour sa relecture attentive.

ISBN 9782340-066847

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

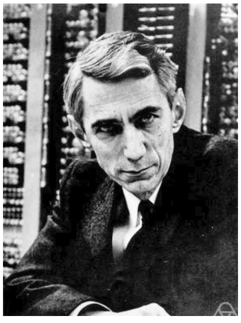
Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Chapitre 1

Mesures de fréquences

UN SCIENTIFIQUE



Claude Shannon (1916-2006) obtient son doctorat au Massachusetts Institute of Technology à Boston sur la logique de Boole. II travaille alors aux Laboratoires Bell de 1941 à 1972. Pendant la Seconde Guerre mondiale les services secrets américains le sollicitent pour les éclairer sur des problèmes de cryptographie ce qui l'amène, en 1948, à fonder la théorie de l'information dans un remarquable article où il ouvre des champs totalement nouveaux pour le transport d'informations.

Un peu d'histoire

La théorie du signal est relativement jeune mais elle s'est développée sur des bases mathématiques déjà élaborées. Comme les informations sont transportées en général par des ondes, les fonctions périodiques y jouent un rôle fondamental. Joseph Fourier (1768-1830) montre que ces fonctions peuvent se développer en sommes de fonctions trigonométriques ce qui permet des codifications très simples.

Dans un premier temps, les transferts d'information l'ont été de manière analogique. En 1927, Harry Nyquist détermine des conditions nécessaires pour transformer en forme numérique un signal analogique ; Shannon en fera une démonstration précise. Celui-ci rédige en 1948 un article dans lequel il jette les bases de la théorie de l'information de manière très universelle. Il y montre que tout message peut être transformé en unité binaire : c'est le début de l'ère du numérique.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- ▷ Le fonctionnement d'un oscillateur quasi-sinusoïdal
- ▷ Le principe de la détection synchrone
- ▷ La différence entre un signal analogique et un signal numérique
- ▷ L'échantillonnage et la quantification
- ▷ La condition de Nyquist-Shannon
- ▷ L'analyse spectrale numérique

Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal en bouclant un amplificateur avec un filtre passe-bande
- ▷ Réaliser une détection synchrone avec un multiplieur analogique
- ▷ Savoir choisir les paramètres : durée, nombre d'échantillons et fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon
- ▷ Savoir mettre en évidence et reconnaître un phénomène de repliement de spectre
- ▷ Élaborer un signal électrique analogique modulé en fréquence à l'aide d'un GBF
- ▷ Simuler en Python le phénomène de repliement de spectre
- ▷ Expliquer, à l'aide d'une simulation Python, l'influence de la fréquence d'échantillonnage

■■ Résumé de cours

■ Production d'un signal : l'oscillateur quasi-sinusoïdal

L'objectif est de réaliser un montage électronique produisant un signal quasi-sinusoïdal **oscillant tout seul**, sans placer de signal en entrée (sans GBF !). L'énergie nécessaire est fournie par une alimentation continue, par exemple par une pile ou une alimentation basse tension telle que celle que l'on trouve dans un ordinateur.

❑ Étude dans le domaine temporel : conditions d'oscillations

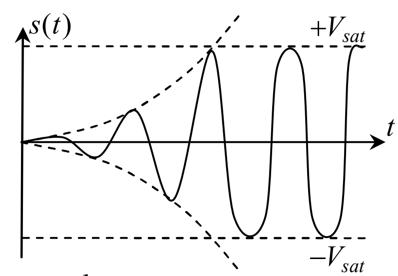
Un système linéaire est régi par une équation différentielle à coefficients constants. En se limitant à des systèmes d'ordre 2, la sortie $s(t)$ vérifie donc :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

On admet que b_0 et b_2 sont positifs, mais que le terme b_1 peut être soit positif (perte d'énergie = amortissement), soit nul, soit négatif (gain d'énergie = amplification).

→ Si $b_1 = 0$, la solution de l'équation différentielle est purement sinusoïdale. **C'est le cas idéal de l'oscillateur harmonique sans pertes**, qui est purement théorique. Il n'est pas possible d'obtenir b_1 rigoureusement nul en pratique.

→ Si $b_1 < 0$ mais proche de 0, la solution est de la forme $\exp\left(\frac{|b_1|}{2b_2} t\right)\sin(\omega t + \varphi)$. Le signal est sinusoïdal avec une amplitude qui s'accroit progressivement. Ce sont **les non linéarités** qui stoppent cet accroissement et bornent l'amplitude (à $\pm V_{\text{sat}}$ pour un ALI).



b_1 légèrement négatif

⇨ **Méthode 1.2. Dans le domaine temporel : l'équation différentielle**

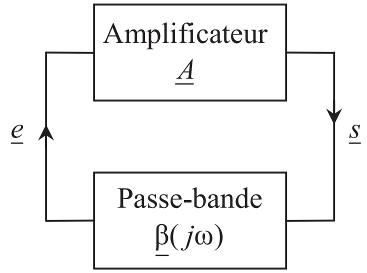
En pratique, on cherche à avoir b_1 négatif pour obtenir un amorçage des oscillations, mais **le plus proche possible de 0**. Le signal obtenu est **quasi**-sinusoïdal : les non linéarités nécessaires pour stopper l'accroissement des oscillations déforment un peu le sinus obtenu, et ce d'autant plus que b_1 est éloigné de 0.

❑ Étude dans le domaine fréquentiel : la condition de Barkhausen

L'oscillateur comporte un montage à amplificateur $\underline{A}$ avec une boucle de rétroaction $\beta(j\omega)$ composé d'un filtre passe-bande du second ordre.
Dans le cas de l'oscillation quasi-sinusoïdale :

→ $\underline{s} = \underline{A}\,\underline{e}$ pour l'amplificateur ;

→ $\underline{e} = \underline{\beta}\,\underline{s}$ pour le filtre passe-bande.



Il vient $\underline{s} = \left(\underline{A}\,\underline{\beta}\right)\underline{s}$. Pour avoir une solution $\underline{s} \neq 0$, donc oscillation, la condition de Barkhausen $\underline{A}\,\underline{\beta} = 1$ doit être vérifiée.

Pour obtenir un oscillateur quasi-linéaire, **l'idéal** est de respecter **la condition de Barkhausen** $\boxed{\underline{A}\,\underline{\beta} = 1}$.

En TP, il n'est pas possible d'obtenir une égalité parfaite : on se place alors à $\left|\underline{A}\,\underline{\beta}\right|$ très légèrement supérieur à 1 pour avoir légère divergence. Les non linéarités (saturation des ALI) stoppent la divergence.

⇨ **Méthode 1.1. Dans le domaine fréquentiel : la condition de Barkhausen**

La condition de Barkhausen $\underline{A}\left(j\omega\right)\underline{\beta}\left(j\omega\right) = 1$ est une égalité entre grandeurs complexes, qui donne donc 2 égalités réelles :

– l'une impose une condition sur les valeurs des composants (R, L ou C) à choisir ;

– l'autre fait intervenir la pulsation ω : c'est la pulsation spontanée de l'oscillateur électronique.

■ Traitement du signal analogique

Il est possible d'effectuer un spectre de manière analogique, sans calcul de transformée de Fourier. L'oreille humaine, par exemple, réalise cet exploit ! Nous allons voir ici comment réaliser une analyse spectrale à l'aide de montages électroniques analogiques.

⇨ **Méthode 1.4. Réaliser un analyseur de spectre analogique**

Utilisation d'un filtre passe bande très sélectif

L'idée est d'utiliser un filtre passe-bande très sélectif, c'est-à-dire de bande passante très étroite. Un composant électronique, comme une résistance variable, permet de faire varier la fréquence passante. On peut ainsi réaliser, en quelque sorte, un « scan » de l'ensemble du spectre en parcourant toutes les fréquences. Une tension de sortie non nulle pour une fréquence passante f_0 indique que le signal d'entrée comporte cette fréquence dans son spectre. La précision relative d'un tel spectre est $1/Q = \Delta f \,/\, f_0$: le facteur de qualité doit donc être important.

Détection synchrone

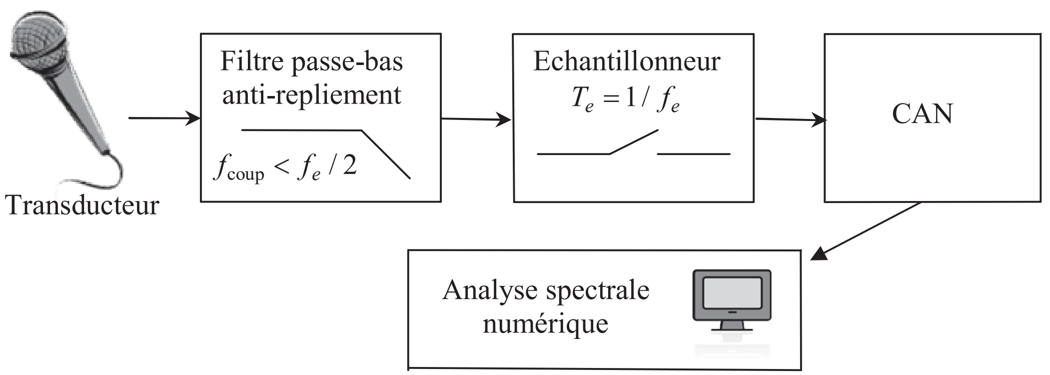
Le signal $e(t)$ à analyser est multiplié (à l'aide d'un multiplieur analogique) par un signal de la forme $a(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t\right)$. Si $e(t)$ contient une composante $e_0\cos\left(2\pi f_0 t\right)$, le signal de sortie comporte le produit des 2 termes, soit $\left(Ae_0/2\right)\left(1+\cos\left(4\pi f_0 t\right)\right)$. Puis un filtrage passe-bas de fréquence de coupure très basse garde le signal continu égal à $Ae_0/2$. Connaissant A, on en déduit e_0, amplitude de la composante f_0 du signal $e(t)$.

→ Avantage du détecteur synchrone : il peut extraire un signal faible même noyé dans le bruit.

→ Difficulté : $a(t)$ doit être non seulement de même fréquence, mais aussi de même phase que le signal à extraire (donc synchrone).

■ Acquisition et traitement numérique du signal

Les phénomènes réels varient manière **continue**. Un son, une température, un signal électrique peuvent prendre n'importe quelle valeur : on parle de signal analogique.
La grandeur à traiter est d'abord convertie en signal électrique à l'aide d'un capteur (microphone, sonde, …), puis numérisée à l'aide d'un convertisseur numérique analogique (CAN).
La numérisation consiste à coder le signal en **nombre limité de valeurs bien définies**. Le signal devient alors discret et codé sous forme de bits prenant la valeur 0 ou 1. Soit le signal est supérieur à un niveau et prend la valeur 1, soit il est en dessous et prend la valeur 0. Un bruit additif assez faible ne viendra pas perturber le signal. Il peut ainsi facilement être enregistré, traité et restitué très fidèlement. De plus, on peut faire apparaître une certaine redondance dans le signal avec des bits de contrôle pour détecter et corriger d'éventuelles erreurs.
Enfin, le signal numérique est filtré ou analysé à l'aide d'un simple calcul réalisé par calculateur, sans utiliser de composants électroniques. Les caractéristiques du traitement peuvent également être modifiées suivant les besoins, ou améliorées, en changeant simplement quelques paramètres à l'aide d'un logiciel dans un ordinateur par exemple. Enfin, ces caractéristiques ne dérivent pas dans le temps, contrairement aux composants électroniques.



❑ La conversion analogique/numérique (CAN)

La numérisation (CAN) nécessite un échantillonnage et une quantification.
L'échantillonnage consiste à prendre périodiquement une mesure du signal, à $t = nT_e$. T_e est la période d'échantillonnage (n entier). On note aussi $f_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage. Cette opération est réalisée par un interrupteur commandé appelé échantillonneur.
La quantification affecte une valeur numérique approchée à chaque échantillon prélevé, parmi un nombre limité de valeurs possibles, puis cette valeur est convertie en binaire.

De plus, l'acquisition ne peut se faire que sur une durée τ limitée, que l'on appelle durée d'acquisition (ou fenêtre d'analyse). En notant N le nombre d'échantillons prélevés, on a $\tau = N T_e$.

Dans l'exemple ci-dessus, le signal analogique (courbe continue) est échantillonné avec une période T_e, avec 15 échantillons, et quantifié sur 3 bits, soit $2^3 = 8$ niveaux de quantification.

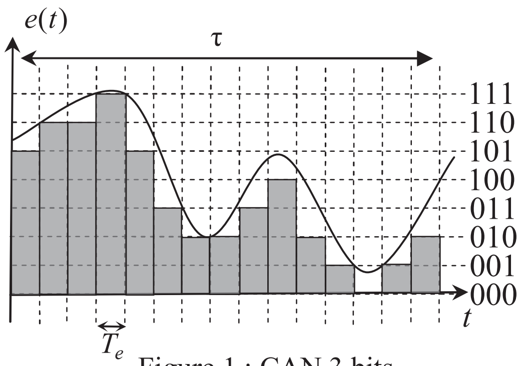


Figure 1 : CAN 3 bits

Les CAN sont situés dans la carte d'acquisition pour l'ordinateur, ou directement dans l'oscillateur numérique. Ils sont utilisés pour quantifier et coder une valeur analogique en binaire. Citons, entre autres :

− le CAN à rampe (ou comptage d'impulsion) intègre la tension analogique jusqu'à une tension de rééerence ; un compteur binaire compte le temps écoulé ;

− le CAN à approximations successives ;

− le CAN Flash (ou parallèle) compare le signal à $2^N - 1$ tensions de référence obtenues à l'aide d'un pont diviseur de tension composé de 2^N résistances (voir exercice 1.4).

❑ Analyse spectrale et condition de Nyquist-Shannon

La tension étant maintenant enregistrée sous forme de suite de valeurs numériques, un calcul numérique permet d'obtenir le spectre. Les logiciels utilisent souvent un algorithme appelé FFT (« Fast Fourier Transform »).

⇨ Méthode 1.5. Transformée de Fourier discrète en Python et limitation introduite par l'échantillonnage

Toutefois, ce traitement n'est pas sans défauts, dont les 2 principaux sont les suivants.

Prenons l'exemple de l'acquisition du signal $e(t) = A\cos(2\pi f t)$.

− Une durée d'acquisition τ non adaptée a pour effet d'élargir les raies du spectre, voire de faire apparaître dans le spectre des raies parasites tous les $f_P = 1/\tau$ de chaque côté de f. Pour remédier ou atténuer ce problème, on peut soit prendre une fenêtre qui contient un nombre entier de périodes de $e(t)$ (c'est l'idéal, mais pas toujours possible), soit choisir une durée d'acquisition assez grande devant la période de $e(t)$. Les logiciels ou oscilloscopes numériques proposent aussi des fenêtres d'analyse adaptées pour limiter ce problème (la fenêtre « Hamming » est la plus courante).

− La fréquence d'échantillonnage f_e introduit une discrétisation dans le domaine temporel, qui se traduit par une périodicité f_e dans le domaine fréquentiel.

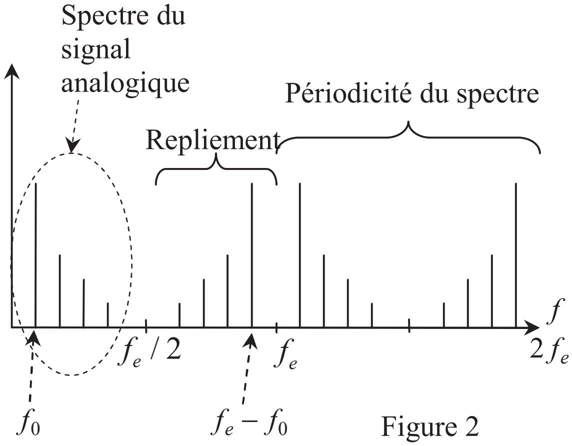


Figure 2

Un signal périodique temporellement de période T se décompose en une somme discrète de termes dans le domaine fréquentiel (se reporter à l'annexe 2 sur les séries de Fourier). Le spectre se présente avec des raies de fréquences multiples de $f = 1/T$. L'inverse est valable également : une discrétisation avec une durée d'échantillonnage T_e dans le domaine temporel donne une périodicité $f_e = 1/T_e$ dans le domaine fréquentiel.

Il y a dualité entre domaines temporel et fréquentiel : une discrétisation a dans un domaine donne une périodicité $1/a$ dans l'autre domaine, et réciproquement.

A cette périodicité du spectre s'ajoute **un repliement de spectre** : tout signal de fréquence f_0 échantillonné à la fréquence f_e fait aussi apparaître une raie à la fréquence $\left(f_e - f_0\right)$. Cela s'observe facilement lorsque l'on filme une roue, qui semble parfois tourner à l'envers (effet stroboscopique).

Si le signal comporte une fréquence supérieure à $f_e/2$, celui-ci fait apparaître une fréquence égale à $f_0 - f_e$ qui est inférieure à $f_e/2$. On ne peut alors plus distinguer les fréquences réelles du signal des répliques apparues par repliement de spectre ! Dans l'exemple figure 3, un signal de fréquence $f_0 = 1\,\text{kHz}$ a été échantillonné à $f_e = 1{,}05\,\text{kHz}$ (carrés noirs) : les carrés semblent parcourir un sinus de basse fréquence ($f_e - f_0 = 1050 - 1000 = 50\,\text{Hz}$).

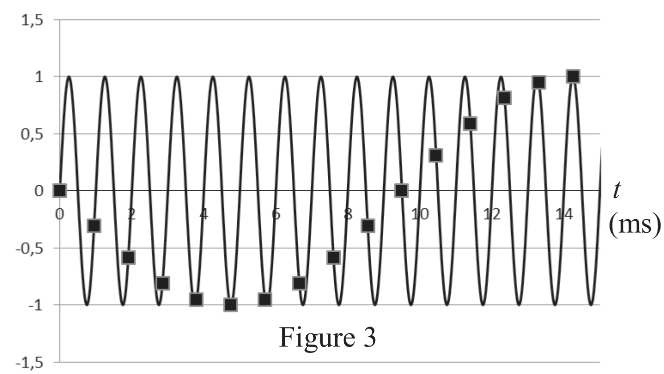


Figure 3

Il est donc indispensable de ne traiter que des signaux ne comportant pas de fréquences supérieures à $f_e/2$: c'est le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.

Afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, on cherche donc à augmenter la fréquence d'échantillonnage, de sorte à avoir **2 points minimum par période** de la plus haute fréquence du signal traité. Toutefois, si ce signal contient beaucoup d'harmoniques (créneau par exemple), le critère de Shannon peut ne pas être respecté pour les harmoniques élevées, ce qui parasitera le signal par des fréquences non souhaitées dues au repliement de spectre. Il est alors nécessaire de placer un filtre passe-bas anti-repliement en amont de l'échantillonneur pour supprimer les fréquences supérieures à $f_e/2$. Il y a alors perte des informations contenues dans ces fréquences filtrées.
Par contre, si l'on augmente la fréquence d'échantillonnage à nombre de points N constants, cela diminue la durée d'acquisition. Or la durée d'acquisition doit rester supérieure à la période du fondamental du signal. L'idéal est donc d'avoir un très grand nombre de points, ce qui augmente sensiblement le temps de calcul de la FFT (logiciels ou oscilloscopes limités en nombres de points). Il faut trouver un compromis.

⇨ **Méthode 1.3. Effectuer un compromis respectant le critère de Nyquist-Shannon**