

# MP/MP\* PSI/PSI\*

Patrick Beynet

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR BERTRAND HAUCHECORNE

# SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

2<sup>e</sup> édition

**NOUVEAUX  
PROGRAMMES** !

ellipses

# Chapitre **1**

# Cinématique du solide indéformable

Le lancement des premiers modules de l'**ISS** (**station spatiale internationale**) a été réalisé en 1998. C'est un projet piloté par la **NASA**, développé conjointement avec l'agence spatiale fédérale russe **FKA**, et avec la participation des agences spatiales européenne **ESA**, japonaise **JAXA** et canadienne **ASC**. La station spatiale internationale est le plus grand des objets artificiels placés en orbite terrestre. Après de nombreuses évolutions, elle s'étend aujourd'hui

sur 110 m de longueur, 74 m de largeur et 30 m de hauteur. Sa masse est d'environ 400 tonnes. La station est occupée en permanence par un équipage international effectuant des expériences scientifiques. L'astronaute **Thomas Pesquet** a été le premier français commandant de l'**ISS** en 2021 lors de la mission *Alpha*.



## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions de trajectoire, vitesse et accélération d'un point en mouvement par rapport à un repère
- ▷ Le torseur cinématique caractérisant le mouvement d'un solide par rapport à un autre
- ▷ La relation de composition des torseurs cinématiques
- ▷ Le torseur cinématique d'une liaison normalisée.

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Proposer une modélisation des liaisons avec une définition précise de leurs caractéristiques géométriques
- ▷ Associer le paramétrage au modèle cinématique retenu
- ▷ Associer à chaque liaison son torseur cinématique
- ▷ Déterminer une trajectoire, un vecteur vitesse ou un vecteur accélération
- ▷ Déterminer le torseur cinématique d'un solide.

## ■ Trajectoire, vitesse et accélération

### □ Trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point P dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans R. On la note  $T(P/R)$ .

### □ Formule de Bour

Soient un vecteur  $\vec{U}$  quelconque et deux bases  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_0} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_1} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{U}$$

où  $\vec{\Omega}(B_1/B_0)$  est le taux de rotation de  $B_0$  par rapport à  $B_1$ .

### □ Vecteur vitesse

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{V}(P/R) = \left. \frac{d\overline{OP}}{dt} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-1}]$$

### □ Vecteur accélération

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{a}(P/R) = \left. \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2\overline{OP}}{dt^2} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-2}]$$

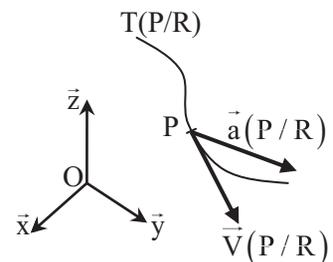
⇒ **Méthode 1.1. Détermination d'un vecteur vitesse ou accélération par application de la formule de Bour**

### Remarques

– Le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire  $T(P/R)$  au point P, et orienté dans le sens du mouvement.

Le vecteur accélération possède une composante tangente à la trajectoire et une composante normale, dirigée vers l'intérieur de la trajectoire lorsqu'elle possède une courbure.

– Pour le calcul d'un vecteur vitesse ou d'un vecteur accélération, aucune base de projection n'est à privilégier. On s'attachera à avoir un résultat concis.



## ■ Torseur cinématique d'un solide indéformable

### □ Définition

Au point de réduction M, le torseur cinématique caractérisant le mouvement du solide i en mouvement par rapport au solide j est défini par :

$$\{V(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(M,i/j) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} P_{ij} & u_{ij} \\ Q_{ij} & v_{ij} \\ R_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{\text{base de projection}}$$

$\vec{\Omega}(i/j)$  : résultante du torseur cinématique ou taux de rotation [rad.s<sup>-1</sup>]

$\vec{V}(M,i/j)$  : moment résultant du torseur cinématique ou vitesse linéaire [m.s<sup>-1</sup>]

Remarques

–  $\vec{V}(P/R) \neq \vec{V}(P,S/R)$  et  $\vec{a}(P,S/R) \neq \left. \frac{d\vec{V}(P,S/R)}{dt} \right|_R$  sauf si le point P est fixe dans le repère lié au solide indéformable S.

–  $\vec{a}(M,S_n/S_1) \neq \sum_{i=2}^n \vec{a}(M,S_i/S_{i-1})$  sauf si les termes de Coriolis sont nuls.

### □ Propriétés

Relation de Varignon

$$\vec{V}(A,S/R) = \vec{V}(B,S/R) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

Addition

$$\{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(M,3/2) + \vec{V}(M,2/1) \end{array} \right\}$$

Invariants

– Premier invariant : la résultante  $\vec{\Omega}(i/j)$

– Second invariant : l'automoment

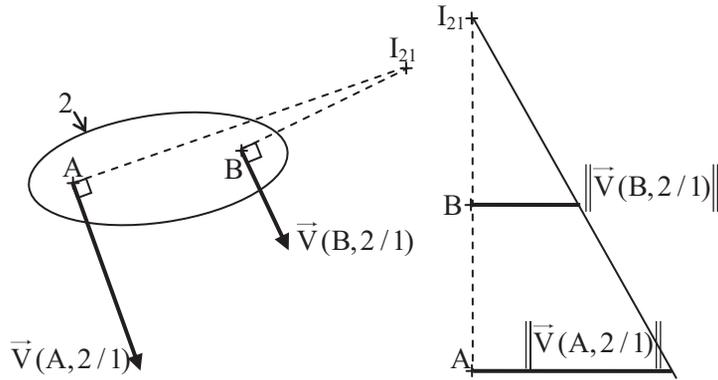
$$\vec{\Omega}(i/j) \cdot \vec{V}(A,i/j) = \vec{\Omega}(i/j) \cdot \vec{V}(B,i/j)$$

Axe instantané de rotation

Ensemble des points pour lesquels la norme de la vitesse  $\vec{V}(M,i/j)$  est nulle, la résultante  $\vec{\Omega}(i/j)$  étant non nulle.

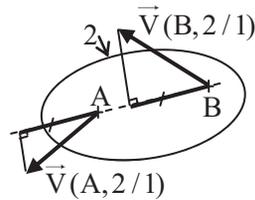
Centre instantané de rotation (C.I.R.) :  $\vec{V}(I_{21}, 2/1) = \vec{0}$

$$\frac{\|\vec{V}(A,2/1)\|}{I_{21A}} = \frac{\|\vec{V}(B,2/1)\|}{I_{21B}} = \|\vec{\Omega}(2/1)\| \quad (\text{voir figure en page suivante})$$



Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(A, 2/1) \cdot \overline{AB} = \vec{V}(B, 2/1) \cdot \overline{AB}$$



Même si les méthodes graphiques ne sont plus exigibles pour les concours, on estime qu'elles ont un intérêt pédagogique certain. Le lecteur est alors libre de les aborder.

⇒ **Méthode 1.2. Applications de cinématique graphique**

### □ Mouvements particuliers

Mouvement de translation

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un point O

$$\{V(2/1)\}_O = \begin{Bmatrix} \overline{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un axe  $(O, \vec{u})$

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{u}, \dots)} \quad M \in (O, \vec{u})$$

Mouvement hélicoïdal d'axe  $(O, \vec{u})$

$$\{V(2/1)\}_M = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{u} \\ u_{21} \vec{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{u}, \dots)} \quad \begin{array}{l} u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si l'hélice est à droite} \\ u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si l'hélice est à gauche} \end{array}$$

$\lambda$  : pas du système vis/écrou

Mouvement plan sur plan de normale  $\vec{z}$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} r_{21}\vec{z} \\ \mathbf{u}_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

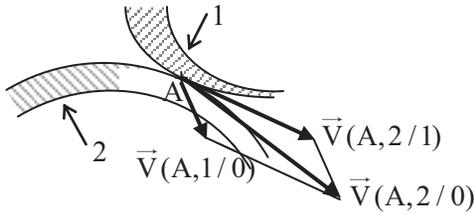
### □ Composition des mouvements

Soient  $n$  solides  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on montre qu'il y a composition des torseurs cinématiques :

$$\{V(S_n / S_1)\} = \sum_{i=2}^n \{V(S_i / S_{i-1})\}$$

On a alors  $\vec{\Omega}(S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}(S_i / S_{i-1})$  et  $\vec{V}(M, S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{V}(M, S_i / S_{i-1})$ .

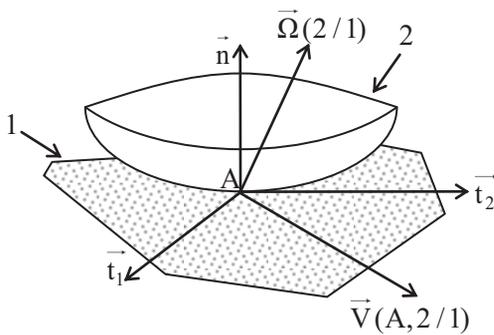
Vitesse de glissement



Vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(A, 2/1)$  : s'il est non nul, il est dans le plan tangent au contact entre les solides 1 et 2.

$$\vec{V}(A, 2/1) = \vec{V}(A, 2/0) - \vec{V}(A, 1/0)$$

Cinématique du contact



$$\vec{\Omega}(2/1) = \vec{\Omega}_p(2/1) + \vec{\Omega}_r(2/1) = p_{21}\vec{n} + q_{21}\vec{t}_1 + r_{21}\vec{t}_2$$

$$\vec{V}(A, 2/1) = v_{21}\vec{t}_1 + w_{21}\vec{t}_2$$

vitesse de rotation de pivoting

$$\|\vec{\Omega}_p(2/1)\| = p_{21}$$

vitesse de rotation de roulement

$$\|\vec{\Omega}_r(2/1)\| = \sqrt{(q_{21})^2 + (r_{21})^2}$$

vitesse linéaire de glissement

$$\|\vec{V}(A, 2/1)\| = \sqrt{(v_{21})^2 + (w_{21})^2}$$

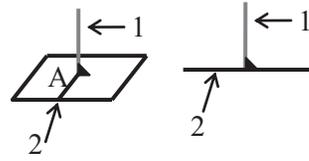
Condition de **non-glissement** :  $\vec{V}(A, 2/1) = \vec{0}$

Condition de **maintien du contact** :  $\vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$

## ■ Liaisons normalisées

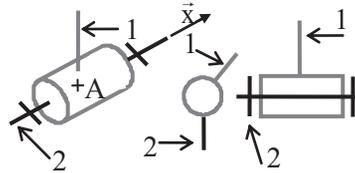
Liaison **encastrement** :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



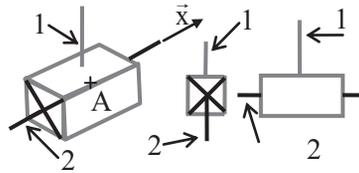
Liaison **pivot d'axe** ( $A, \vec{x}$ ) :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



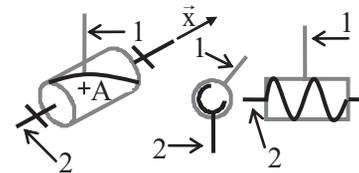
Liaison **glissière** de direction  $\vec{x}$  :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{21} \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



Liaison **hélicoïdale** d'axe ( $A, \vec{x}$ ) :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & \pm \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{x} \\ \pm \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



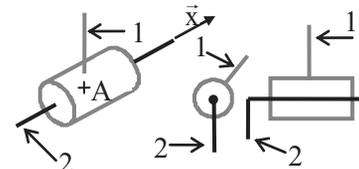
$\lambda$  : pas de l'hélice

$$u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à droite}$$

$$u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à gauche}$$

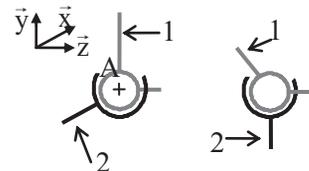
Liaison **pivot glissant** d'axe ( $A, \vec{x}$ ) :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{x} \\ u_{21} \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



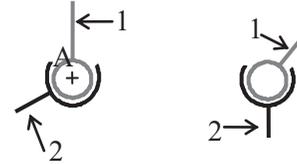
Liaison **sphérique à doigt** d'axes ( $A, \vec{x}$ ) et ( $A, \vec{z}$ ) :

$$\left\{ V(2/1) \right\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} p_{21} \vec{x} + r_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



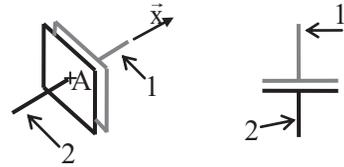
Liaison **sphérique** de centre A :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$



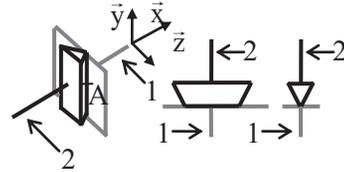
Liaison **appui plan** de normale  $\vec{x}$  :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$



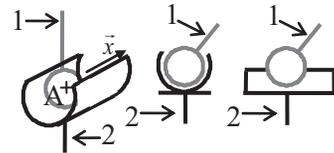
Liaison **linéaire rectiligne** d'axe  $(A, \vec{y})$  et de normale  $\vec{x}$  :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$



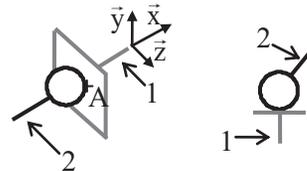
Liaison **sphère cylindre** de centre A et de direction  $\vec{x}$  :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ u_{21}\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$



Liaison **sphère plan** de normale  $(A, \vec{x})$  :

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_A (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{Bmatrix} p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$



⇒ **Méthode 1.3. Détermination du torseur cinématique d'un solide**