Parcours et méthodes

T^{le} → CPGE

Vers la prépa !

Mathématiques

NOUVEAUX PROGRAMMES !

LES ÉTAPES POUR RÉUSSIR

- *Synthèses de cours*
- *Méthodes appliquées*
- *Exercices et corrigés détaillés*

ellipses

Cours complet

1 Démonstration par récurrence

1.1 Comment démontrer A ⇒ B ?

Méthode 1.1

Pour démontrer $A \Rightarrow B$ on ne démontre ni A, ni B. On suppose que A est vrai et on démontre que cela entraîne B.

Remarques 1.1

1. Si on suppose que A est vrai alors on peut en déduire que A est vrai. Évidemment cela n'a aucun intérêt !
2. Il est tout à fait possible que $A \Rightarrow B$ soit vrai bien que A soit faux et B soit faux. Ainsi, en est-il, par exemple, dans la proposition « si les chevaux n'ont que deux pattes alors il suffit de deux fers pour les ferrer ».
3. Dans la démonstration par récurrence d'une famille de propositions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, on ne doit ni montrer P_n, ni montrer P_{n+1}. Pour cela, la clé est de supposer qu'**une** proposition P_n est vraie, puis de montrer que cela entraîne que **la** propriété suivante est également vraie.

Exemple

On veut démontrer que pour tout $n \geq 3$, entier, on a $2^n \geq n$.

1. Pour $n = 3$ cette affirmation est vraie puisque $2^3 = 8$ est vraiment supérieur à 3.
2. Supposons maintenant qu'il existe un entier $p \geq 3$ tel que $2^p \geq p$ alors ceci entraînera successivement :

$$2^{p+1} = \underbrace{2\cdot 2^p \geq 2\cdot p}_{\text{car on a supposé que } 2^p\geq p} = \underbrace{p+p \geq p+1}_{\text{car } p\geq 3 \geq 1}.$$

Cette seconde partie montre que lorsque l'inégalité $2^p \geq p$ est vraie pour un entier p, elle est encore vraie pour l'entier suivant (c'est-à-dire pour $p+1$).

C'est tout, cela suffit pour démontrer qu'on a bien $2^n \geq n$ pour tout $n \geq 3$ entier.
On aurait pu partir de $n = 2$ ou de $n = 1$ au lieu de $n = 3$ dans cette démonstration. Par contre, même si le résultat est vrai pour $n = 0$, on n'aurait pas pu remplacer 3 par 0.

1.2 Le principe

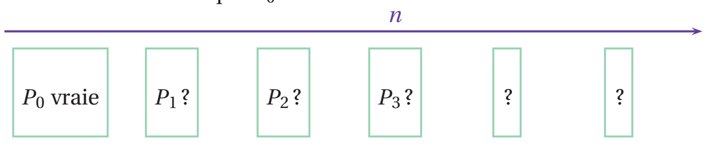
Méthode 1.2

Soient P_0, P_1, P_2, ... , P_n, ... un grand nombre ou même une infinité dénombrable de propositions mathématiques dont on veut démontrer qu'elles sont toutes vraies.

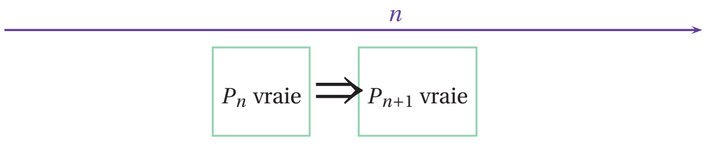
– *Initialisation* : On établit que P_0 est vraie.

– *Hérédité* : On établit que, pour **un** entier naturel p **quelconque**, *si la proposition P_p est vraie alors la proposition P_{p+1} est vraie aussi.*

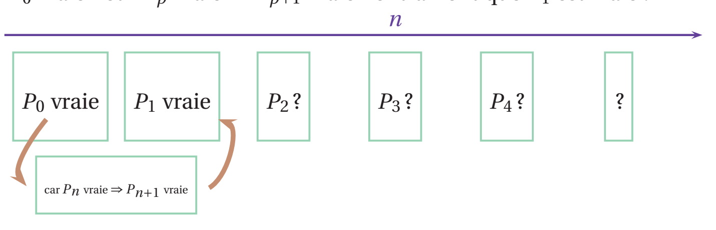
Cela suffit pour prouver que toutes les proposition P_n sont vraies. Pourquoi ?
Schématisons : On a établi que P_0 est vraie.



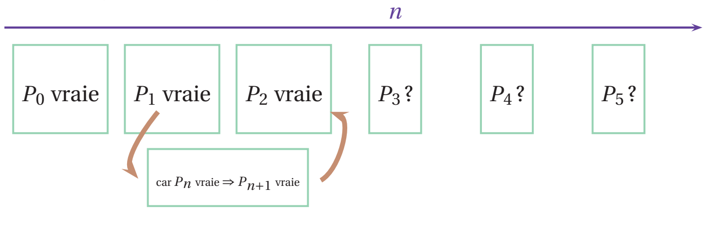
Puis on a établi que, si pour un entier p quelconque, P_p est vraie alors P_{p+1} est vraie aussi.



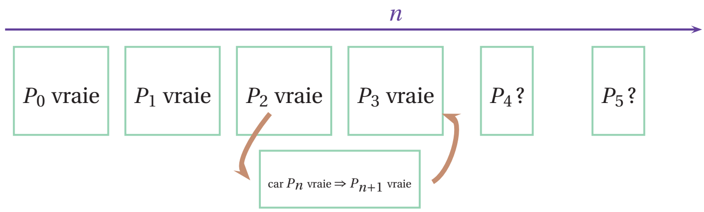
Mais « P_0 vraie » et « P_p vraie $\Rightarrow$ P_{p+1} vraie » entraînent que P_1 est vraie :



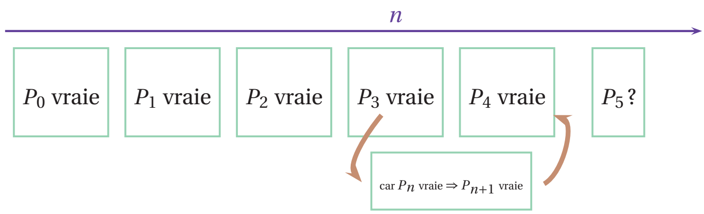
« P_1 vraie » et « P_p vraie $\Rightarrow$ P_{p+1} vraie » entraînent à leur tour que P_2 est vraie :



« P_2 vraie » et « P_p vraie $\Rightarrow P_{p+1}$ vraie » entraînent que P_3 est vraie :



« P_3 vraie » et « P_p vraie $\Rightarrow P_{p+1}$ vraie » entraînent que P_4 est vraie :



Etc. Ceci se propage jusqu'au dernier indice n, s'il existe, et à l'infini, dans le cas contraire.

Une démonstration par récurrence contient toujours obligatoirement deux étapes :

L'initialisation : on vérifie que la proposition est vraie initialement, c'est-à-dire le plus souvent pour $n = 0$ ou $n = 1$.

L'hérédité, c'est-à-dire la récurrence proprement dite : on suppose que pour **un** entier n la proposition P_p vraie et on essaie de démontrer que cela entraîne que la proposition suivante P_{p+1} est vraie aussi (en partant de P_p).

Remarques 1.2

1. C'est évidemment une méthode très intéressante, si ce n'est obligatoire, lorsqu'il y a un très grand nombre, voire une infinité de propriétés P_n.

2. Dans P_n n il faut que l'indice n ait un successeur. C'est le cas lorsque n est un entier mais pas si c'est un réel.

   Il est tout à fait possible de raisonner par récurrence sur des familles d'ensembles. On peut étendre le principe de la récurrence aux ensembles bien ordonnés (voir la définition 4.13), on appelle alors cela une récurrence transfinie, ou faire des **récurrences structurelles** (courantes en algorithmique).

Exemple

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = T_n + n + 1, \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
Montrons que pour tout entier naturel n on a $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

– *Initialisation* : On a bien $T_0 = \frac{0(0+1)}{2}$

– *Hérédité* : Supposons qu'il existe un entier naturel p tel que $T_p = \frac{p(p+1)}{2}$, alors on aura

$$T_{p+1} = T_p + p + 1 = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{p^2+3p+2}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

C'est-à-dire que $T_p = \frac{p(p+1)}{2}$ entraîne $T_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ (la même formule où $p+1$ a remplacé p).

Remarques 1.3

1. On n'est pas obligé de commencer la récurrence à 0. On peut très bien débuter par 2 ou par 3 si, par exemple, les premiers termes sont des exceptions... ou même commencer à -7 ou -22 dans certains cas.

2. Il faut bien prendre conscience de la différence qu'il y a entre supposer l'existence **d'un** entier p pour lequel la propriété P_p serait vraie et supposer que la propriété P_n est vraie pour **tous** les entiers naturels n.

3. Dans la deuxième partie de la démonstration, c'est-à-dire l'hérédité, on peut écrire, au brouillon, bien sûr, l'énoncé de la propriété avec $p+1$.

Exemple

Démontrons que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

- Pour $n = 1$ la formule donne $1^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$, ce qui est vrai.

- Supposons que pour un entier naturel p on ait $1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$. Alors on aura

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 + (p+1)^2 &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 \\ &= \frac{(p+1)\left(2p^2+7p+6\right)}{6} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

On retrouve la même formule dans laquelle $p+1$ remplace p.

Remarques 1.4

1. Évidemment si une propriété est fausse on ne peut pas la démontrer même par récurrence !
   Essayons, par curiosité, de démontrer que
   $$1+2+3+\ldots+n=\frac{n^3+17n-6}{12}.$$
   - Pour $n=1$ la formule donne $1=\frac{1^3+17\times 1-6}{12}$, ce qui est vrai.
   - Pour $n=2$ la formule donne $1+2=\frac{2^3+17\times 2-6}{12}$, ce qui est vrai.
   - Pour $n=3$ la formule donne $1+2+3=\frac{3^3+17\times 3-6}{12}$, ce qui est vrai.
   - Supposons maintenant que, pour un entier naturel p, on ait $1+2+3+\ldots+p=\frac{p^3+17p-6}{12}$. Cela entraînera que $1+2+3+\ldots+p+(p+1)=\dfrac{p^3+17p-6}{12}+(p+1)=\dfrac{p^3+29p+6}{12}$. Mais ceci n'est pas la bonne quantité, il faudrait trouver $\frac{(p+1)^3+17(p+1)-6}{12}$, c'est-à-dire $\frac{p^3+3p^2+20p+12}{12}$.
2. Dans l'exemple ci-dessus on a P_0 vraie, P_1 vraie, P_2 vraie, P_3 vraie sans pour autant que P_4 soit vraie. Cela montre qu'il est **vain** de vérifier une propriété pour un nombre fini de cas, même très grand, avec l'espoir de démontrer que cette propriété est vraie dans une infinité de cas.

Exercice 1.1

Soit $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ une famille infinie de propositions. Considérons les situations où l'on a montré :

1. P_5 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
2. P_5 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_n \Leftarrow P_{n+1}$.
3. P_5 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_{n-1} \Leftarrow P_n$.
4. P_9 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
5. P_3 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
6. P_9 et $\forall n \in [\![5,9]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n-1}$.
7. P_7 et $\forall n \in [\![5,9]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n-1}$.
8. P_9 et $\forall n \in [\![5,8]\!],\ P_n \Rightarrow P_{n-1}$.

Pour chacune de ces situations, préciser quel est l'ensemble de propositions P_i effectivement démontrées.

Exercice 1.2

Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser l'égalité $1000 = 9\times 111+1$.

Exercice 1.3

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P_n : 2^n > n^2$.

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est-elle vraie ?

Exercice 1.4

On va « démontrer » la proposition suivante « dans un bocal les olives sont ou bien toutes vertes, ou bien toutes noires ».

– *Initialisation :* Si il n'y a qu'une olive dans un bocal, on peut évidemment affirmer que toutes les olives du bocal sont ou bien toutes vertes, ou bien toutes noires.

– *Hérédité :* Supposons que pour un entier naturel non nul n la propriété soit vraie, c'est-à-dire que dans tout bocal contenant n olives, celles-ci sont ou bien toutes vertes, ou bien toutes noires. Considérons un bocal contenant $n+1$ olives. On retire une olive. Notons celle-ci l'olive o. Il y a maintenant n olives dans le bocal, elles sont donc toutes de la même couleur par hypothèse de récurrence. On remet l'olive o et on en retire une autre p. Il y a encore une fois n olives dans le bocal, et, toujours par hypothèse de récurrence elles sont de la même couleur. Finalement toutes les $n+1$ olives sont bien de la même couleur.

Qu'est-ce qui « cloche » **précisément** ?

Exercice 1.5

Pour démontrer une propriété $P(n)$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence forte on suit le schéma suivant :

- On montre $P(0)$.
- On montre que si, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(k)$, alors, on a $P(n+1)$.

L'hérédité est donc modifiée. Pour démontrer la propriété au rang $n+1$, on suppose celle-ci vraie non seulement au rang n mais aussi à tous les rangs inférieurs ou égaux à n : 0, 1, 2,...,$n-1$ et n.
Montrer que ce schéma de démonstration, en apparence plus fort que la récurrence simple, lui est en fait équivalent.

2 Dénombrement

2.1 Listes et sous-ensembles

Définition 1.1 – Factorielle

On définit récursivement les factorielles des entiers naturels en posant

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}. \tag{1.1}$$

Exemples

$3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6,$ et $4! = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24.$

Exercice 1.6

Déterminer quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes :

1. $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ (nk)! = n!k!$,
2. $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ (n+k)! = n! + k!$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ (n+1)! = n! + 1!$,
4. $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ (n+1)! = n!(n+1)$,
5. $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ (2n)! = 2n!$,
6. $\forall n, k \in \mathbb{N}^\star,\ (n!)^2 = \left(n^2\right)!$.

Exercice 1.7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ dont on admet qu'elle est deux fois dérivable sur $[3, +\infty[$. Déterminer les expressions de $f'(x)$ et de $f''(x)$. Établir le signe de $f''(x)$, puis la variation de f'. Calculer la limite de $f'(x)$ quand $x \to +\infty$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis la variation de f.
2. En déduire que $x \geq 3 \Rightarrow f(x) \leq -\ln(2)$ puis $n \geq 2 \Rightarrow (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leq -\ln(2)$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a $(n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$.
4. À l'aide ce qui précède montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 \Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n. \tag{1.2}$$

En combinatoire $n!$ a le sens suivant : c'est le nombre de façons de **permuter** les n éléments d'un ensemble. Par exemple : l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ possède 4 éléments avec lesquels on peut faire $4! = 24$ permutions : $abcd \rightsquigarrow abcd$, $abcd \rightsquigarrow abdc$, $abcd \rightsquigarrow acbd$,

$abcd \rightsquigarrow acdb$, $abcd \rightsquigarrow adbc$, $abcd \rightsquigarrow adcb$, $abcd \rightsquigarrow bacd$, $abcd \rightsquigarrow badc$, $abcd \rightsquigarrow bcad$, $abcd \rightsquigarrow bcda$, $abcd \rightsquigarrow bdac$, $abcd \rightsquigarrow bdca$, $abcd \rightsquigarrow cabd$, $abcd \rightsquigarrow cadb$, $abcd \rightsquigarrow cbad$, $abcd \rightsquigarrow cbda$, $abcd \rightsquigarrow cdab$, $abcd \rightsquigarrow cdba$, $abcd \rightsquigarrow dabc$, $abcd \rightsquigarrow dacb$, $abcd \rightsquigarrow dbac$, $abcd \rightsquigarrow dbca$, $abcd \rightsquigarrow dcab$, $abcd \rightsquigarrow dcba$.

Remarque 1.5

On note souvent, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, une permutation par son image, par exemple cab en lieu et place de $abc \rightsquigarrow cab$.

Définition 1.2 – Liste

Soit $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, puis E, un ensemble de n symboles (par définition les éléments d'un ensemble sont toujours distincts deux à deux). Une liste de longueur k est un ensemble **ordonné** de k éléments de E.

On note $[a,c,d]$ ou (a,b,c), c'est-à-dire avec des crochets ou des parenthèses, la liste à trois éléments formée des lettres a, c et d, **dans cet ordre**.

La liste $[a,c,d]$ n'est pas la même que la liste $[a,d,c]$.

Définition 1.3 – Liste sans répétitions

Une liste est dite sans répétitions lorsque tous ses éléments sont distincts deux à deux.

Exemple

- Considérons l'ensemble $E = \{5;6\}$.
  Les listes de trois éléments que l'on peut construire à partir de E sont : $[5;5;5]$, $[6;5;5]$, $[5;6;5]$, $[5;5;6]$, $[5;6;6]$, $[6;5;6]$, $[6;6;5]$ et $[6;6;6]$.
  On ne peut construire aucune liste de trois éléments sans répétitions.

- Avec $E = \{5;6;7\}$ on a vingt-sept listes possibles :
  $[5;5;5]$, $[6;6;6]$, $[7;7;7]$, $[6;5;5]$, $[5;6;5]$, $[5;5;6]$, $[7;5;5]$, $[5;7;5]$, $[5;5;7]$, $[7;6;6]$, $[6;7;6]$, $[6;6;7]$, $[5;6;6]$, $[6;5;6]$, $[6;6;5]$, $[5;7;7]$, $[7;5;7]$, $[7;7;5]$, $[6;7;7]$, $[7;6;7]$, $[7;7;6]$, $[5;6;7]$, $[5;7;6]$, $[6;5;7]$, $[6;7;5]$, $[7;5;6]$ et $[7;6;5]$.
  Seulement six listes sans répétitions : $[5;6;7]$, $[5;7;6]$, $[6;5;7]$, $[6;7;5]$, $[7;5;6]$ et $[7;6;5]$.

- $E = \{5;6;7;8\}$ on peut former vingt-quatre listes sans répétitions :
  $[5;6;7]$, $[5;7;6]$, $[6;5;7]$, $[6;7;5]$, $[7;5;6]$, $[7;6;5]$,
  $[5;6;8]$, $[5;8;6]$, $[6;5;8]$, $[6;8;5]$, $[8;5;6]$, $[8;6;5]$,
  $[5;8;7]$, $[5;7;8]$, $[8;5;7]$, $[8;7;5]$, $[7;5;8]$, $[7;8;5]$,
  $[8;6;7]$, $[8;7;6]$, $[6;8;7]$, $[6;7;8]$, $[7;8;6]$ et $[7;6;8]$. Avec