

Tearii Cridland

Licence  
Capes  
Agrégation

# Panorama des mathématiques du supérieur

Plus de 650 définitions incontournables  
et 1 350 propriétés et théorèmes démontrés



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>CHAPITRE I. NOTIONS DE BASE .....</b>	<b>23</b>
<b>A. Ensembles.....</b>	<b>23</b>
1. Propositions.....	23
<i>a. Propositions équivalentes et contraires .....</i>	<i>23</i>
<i>b. Implication et équivalence .....</i>	<i>23</i>
<i>c. Démonstrations .....</i>	<i>23</i>
2. Définition des ensembles .....	24
<i>a. Définition en extension .....</i>	<i>24</i>
<i>b. Quantificateurs.....</i>	<i>24</i>
<i>c. Définition en compréhension .....</i>	<i>25</i>
3. Opérations sur les ensembles .....	25
<i>a. Inclusion.....</i>	<i>25</i>
<i>b. Réunion et intersection.....</i>	<i>25</i>
<i>c. Complémentaire et différence .....</i>	<i>25</i>
<i>d. Partition .....</i>	<i>25</i>
<i>e. Produit cartésien.....</i>	<i>25</i>
4. Relation binaire sur un ensemble.....	26
<i>a. Définition d'une relation binaire.....</i>	<i>26</i>
<i>b. Fonctions et applications.....</i>	<i>26</i>
<i>c. Relation d'équivalence et relation d'ordre.....</i>	<i>26</i>
<i>d. Ensemble ordonné.....</i>	<i>27</i>
<i>e. Applications croissantes ou décroissantes .....</i>	<i>28</i>
<i>f. Relation d'ordre sur les applications.....</i>	<i>28</i>
<i>g. Image directe ou réciproque .....</i>	<i>28</i>
<i>h. Composition d'applications.....</i>	<i>28</i>
<i>i. Famille et suite d'éléments.....</i>	<i>29</i>
5. Comparaison des ensembles .....	29
<i>a. Cardinaux.....</i>	<i>29</i>
<i>b. Théorème de Cantor-Bernstein.....</i>	<i>29</i>

<i>c. Théorème de Cantor</i> .....	29
<i>d. Ensembles finis, dénombrables et infinis</i> .....	29
<i>e. Généralisation de la réunion et de l'intersection</i> .....	30
<b>B. Groupes, Anneaux et Corps</b> .....	<b>31</b>
1. Loi de composition.....	31
<i>a. Loi externe ou interne</i> .....	31
<i>b. Loi associative</i> .....	31
<i>c. Loi commutative</i> .....	31
<i>d. Loi compatible avec l'ordre</i> .....	31
<i>e. Élément régulier</i> .....	31
<i>f. Élément neutre</i> .....	32
<i>g. Symétrique d'un élément</i> .....	32
<i>h. Loi distributive</i> .....	32
<i>i. Partie stable</i> .....	32
<i>j. Loi sur un ensemble d'applications</i> .....	32
<i>k. Changement d'indices</i> .....	32
2. Groupes.....	33
<i>a. Définition d'un groupe</i> .....	33
<i>b. Sous-groupe</i> .....	33
<i>c. Groupe quotient</i> .....	33
<i>d. Théorème de Lagrange</i> .....	34
<i>e. Morphisme de groupes</i> .....	34
<i>f. Sous-groupe engendré</i> .....	34
<i>g. Ordre d'un élément</i> .....	35
<i>h. Groupe cyclique</i> .....	35
<i>i. Produit de groupes</i> .....	35
<i>j. Actions de groupes</i> .....	36
3. Anneaux.....	37
<i>a. Définition d'un anneau</i> .....	37
<i>b. Symbole de Kronecker</i> .....	37
<i>c. Formule du binôme de Newton</i> .....	37
<i>d. Anneau intègre</i> .....	37
<i>e. Sous-anneau</i> .....	37
<i>f. Morphisme d'anneaux</i> .....	38
<i>g. Idéal d'un anneau commutatif</i> .....	38
<i>h. Groupe des éléments inversibles</i> .....	39
<i>i. Divisibilité dans un anneau commutatif</i> .....	39
<i>j. PGCD et PPCM dans un anneau principal</i> .....	39
<i>k. Produit d'anneaux</i> .....	39
<i>l. Anneau quotient</i> .....	39
<i>m. Caractéristique d'un anneau</i> .....	40

4. Corps .....	40
<i>a. Définition d'un corps</i> .....	40
<i>b. Sous-corps</i> .....	40
<i>c. Corps des fractions d'un anneau intègre</i> .....	41
<b>C. Nombres entiers .....</b>	<b>41</b>
1. Entiers naturels .....	41
<i>a. Axiomes de fondation</i> .....	41
<i>b. Addition et multiplication</i> .....	41
<i>c. Démonstration par récurrence</i> .....	42
<i>d. Caractérisation des parties finies</i> .....	42
<i>e. Propriété d'Archimède</i> .....	43
<i>f. Division euclidienne</i> .....	43
<i>g. Écriture suivant une base</i> .....	43
2. Problèmes de dénombrement .....	43
<i>a. Cardinaux d'ensembles finis</i> .....	43
<i>b. Arrangements</i> .....	43
<i>c. Combinaisons</i> .....	44
3. Entiers relatifs .....	44
<i>a. Construction des entiers relatifs</i> .....	44
<i>b. Division euclidienne</i> .....	45
<i>c. Sous-groupes</i> .....	45
<i>d. Plus grand commun diviseur</i> .....	45
<i>e. Théorème de Bézout</i> .....	45
<i>f. Théorème de Gauss</i> .....	46
<i>g. Plus petit commun multiple</i> .....	46
<i>h. Théorème et algorithme d'Euclide</i> .....	46
<i>i. Équations diophantiennes</i> .....	46
4. Nombres premiers .....	47
<i>a. Définition d'un nombre premier</i> .....	47
<i>b. Décomposition en produit de facteurs premiers</i> .....	47
5. Congruences .....	47
<i>a. Définition de la relation de congruence</i> .....	47
<i>b. Théorème de Wilson</i> .....	48
<i>c. Théorème des restes chinois</i> .....	48
<i>d. Indicateur d'Euler</i> .....	48
<i>e. Théorème de Fermat-Euler</i> .....	48
<b>D. Nombres rationnels et réels .....</b>	<b>49</b>
1. Le corps des rationnels .....	49
<i>a. Construction des rationnels</i> .....	49
<i>b. Propriété d'Archimède</i> .....	49

<i>c. Valeur absolue</i> .....	49
<i>d. Suites rationnelles</i> .....	50
2. Le corps des réels .....	50
<i>a. Construction des réels</i> .....	50
<i>b. Valeur absolue</i> .....	51
<i>c. Propriété d'Archimède</i> .....	51
<i>d. Densité des rationnels dans le corps des réels</i> .....	51
<i>e. Complétude du corps des réels</i> .....	51
<i>f. Propriété de la borne supérieure</i> .....	52
<i>g. Partie entière</i> .....	52
<i>h. Sous-groupes</i> .....	52
<i>i. Intervalles</i> .....	52
<i>j. Puissance d'un réel</i> .....	53
3. Suites réelles .....	53
<i>a. Suites convergentes</i> .....	53
<i>b. Théorème d'encadrement</i> .....	53
<i>c. Théorème de la limite monotone</i> .....	54
<i>d. Suites adjacentes</i> .....	54
<i>e. Théorème de Bolzano-Weierstrass</i> .....	54
<i>f. Suites divergentes</i> .....	54
<i>g. Nombres décimaux</i> .....	55
<i>h. Développement décimal d'un réel</i> .....	55
<i>i. Limites supérieures et inférieures</i> .....	55
<b>E. Nombres complexes .....</b>	<b>56</b>
1. Le corps des complexes .....	56
<i>a. Construction des complexes</i> .....	56
<i>b. Forme algébrique d'un complexe</i> .....	56
<i>c. Conjugué d'un complexe</i> .....	56
2. Représentation géométrique .....	57
<i>a. Module d'un complexe</i> .....	57
<i>b. Complétude du corps des complexes</i> .....	57
<i>c. Suites complexes</i> .....	57
<i>d. Argument d'un complexe</i> .....	57
<i>e. Racines d'un complexe</i> .....	58
<b>F. Polynômes et fractions rationnelles .....</b>	<b>58</b>
1. Polynômes .....	58
<i>a. Suites presque nulles</i> .....	58
<i>b. L'algèbre des polynômes</i> .....	59
<i>c. Degré d'un polynôme</i> .....	59
<i>d. Composition de polynômes</i> .....	60

2. Divisibilité des polynômes.....	60
<i>a. Division euclidienne.....</i>	60
<i>b. Applications polynômes.....</i>	60
<i>c. Racines d'un polynôme.....</i>	61
<i>d. Dérivation des polynômes.....</i>	61
<i>e. Formule de Taylor.....</i>	61
<i>f. Multiplicité d'une racine.....</i>	61
<i>g. Polynômes du second degré.....</i>	61
<i>h. Polynômes scindés.....</i>	62
<i>i. PGCD et PPCM de polynômes.....</i>	62
<i>j. Théorème de Bézout.....</i>	62
<i>k. Théorème de Gauss.....</i>	63
<i>l. Théorème et algorithme d'Euclide.....</i>	63
<i>m. Polynômes conjugués.....</i>	63
<i>n. Décomposition en polynômes irréductibles.....</i>	64
3. Fractions rationnelles.....	64
<i>a. Définition d'une fraction rationnelle.....</i>	64
<i>b. Degré d'une fraction rationnelle.....</i>	65
<i>c. Fonction rationnelle.....</i>	65
<i>d. Partie entière d'une fraction rationnelle.....</i>	65
<i>e. Décomposition en éléments simples.....</i>	65
<i>f. Parties polaires.....</i>	66
4. Polynômes à plusieurs indéterminées.....	66
<i>a. Définition d'un polynôme.....</i>	66
<i>b. Degré d'un polynôme.....</i>	67
<i>c. Applications polynômes.....</i>	68

## **PREUVES DU CHAPITRE I..... 69**

## **CHAPITRE II. ESPACES VECTORIELS..... 141**

### **A. Espaces vectoriels et applications linéaires..... 141**

1. Espaces vectoriels.....	141
<i>a. Définition d'un espace vectoriel.....</i>	141
<i>b. Espace vectoriel produit.....</i>	141
<i>c. Espace vectoriel des applications.....</i>	142
2. Sous-espace vectoriel.....	142
<i>a. Définition d'un sous-espace.....</i>	142
<i>b. Sous-espace vectoriel engendré.....</i>	142
<i>c. Droite vectorielle.....</i>	142
<i>d. Sous-espace somme.....</i>	142
<i>e. Sous-espaces supplémentaires.....</i>	143

<i>f. Hyperplan</i> .....	143
<i>g. Espace vectoriel quotient</i> .....	143
3. Algèbres .....	143
<i>a. Définition d'une algèbre</i> .....	143
<i>b. Algèbre des applications</i> .....	144
<i>c. Sous-algèbre</i> .....	144
<i>d. Sous-algèbre engendrée</i> .....	144
<i>e. Morphisme d'algèbres</i> .....	144
4. Applications linéaires .....	144
<i>a. Définition d'une application linéaire</i> .....	144
<i>b. Noyau et image d'une application linéaire</i> .....	144
<i>c. Isomorphismes et endomorphismes</i> .....	145
<i>d. Théorème noyau-image</i> .....	145
<i>e. Formes linéaires</i> .....	145
<i>f. Homothéties et translations</i> .....	145
<i>g. Projecteurs et symétries</i> .....	145
5. Espaces affines.....	146
<i>a. Définition d'un espace affine</i> .....	146
<i>b. Barycentres</i> .....	146
<i>c. Sous-espaces affines</i> .....	147
<i>d. Applications affines</i> .....	147
<i>e. Groupe affine</i> .....	148
<b>B. Espaces vectoriels de dimension finie .....</b>	<b>148</b>
1. Familles libres et génératrices .....	148
<i>a. Sous-familles et sur-familles</i> .....	148
<i>b. Support et image d'une famille</i> .....	148
<i>c. Familles libres</i> .....	148
<i>d. Familles génératrices</i> .....	149
<i>e. Bases</i> .....	149
<i>f. Coordonnées d'un vecteur</i> .....	149
2. Dimensions des espaces.....	150
<i>a. Théorème de la base incomplète</i> .....	150
<i>b. Théorème de la dimension</i> .....	150
<i>c. Plan vectoriel</i> .....	150
<i>d. Dimension d'un espace somme</i> .....	150
<i>e. Dimension d'un espace produit</i> .....	151
<i>f. Dimension et applications linéaires</i> .....	151
<i>g. Théorème du rang</i> .....	151
<i>h. Rang d'une famille finie</i> .....	152
<i>i. Dimension et isomorphismes</i> .....	152

<i>j. Codimension</i> .....	152
<i>k. Dimension d'un espace affine</i> .....	152
3. Dualité et applications .....	152
<i>a. Base duale</i> .....	152
<i>b. Système d'équations d'un sous-espace</i> .....	153
<i>c. Dimension d'un sous-espace du dual</i> .....	153
<i>d. Polynôme d'interpolation de Lagrange</i> .....	153
4. Compléments sur les corps .....	154
<i>a. Extensions de corps</i> .....	154
<i>b. Extensions algébriques</i> .....	154
<i>c. Corps de rupture</i> .....	155
<i>d. Corps de décomposition</i> .....	156
<i>e. Corps finis</i> .....	156
<i>f. Polynômes sans facteurs carrés</i> .....	156
<i>g. Polynômes cyclotomiques</i> .....	156
<i>h. Polynômes irréductibles dans un corps fini</i> .....	157
<i>i. Corps algébriquement clos</i> .....	157
<b>C. Espaces vectoriels normés .....</b>	<b>157</b>
1. Normes et distances .....	157
<i>a. Norme</i> .....	157
<i>b. Normes équivalentes</i> .....	158
<i>c. Distance</i> .....	158
<i>d. Boules et sphères</i> .....	158
<i>e. Voisinages</i> .....	159
<i>f. Partie bornée</i> .....	159
<i>g. Application bornée</i> .....	159
<i>h. Suite bornée</i> .....	159
<i>i. Suite convergente</i> .....	160
<i>j. Ouverts et fermés</i> .....	160
<i>k. Intérieur et adhérence</i> .....	161
<i>l. Partie dense</i> .....	162
<i>m. Valeur d'adhérence</i> .....	163
<i>n. Suite de Cauchy</i> .....	163
2. Étude locale des applications.....	164
<i>a. Limites</i> .....	164
<i>b. Limites des applications réelles</i> .....	165
<i>c. Continuité</i> .....	165
<i>d. Théorème des valeurs intermédiaires</i> .....	166
<i>e. Applications réelles monotones</i> .....	166
<i>f. Continuité uniforme</i> .....	167



g. Application lipschitzienne.....	167
h. Homéomorphisme.....	168
i. Isométrie.....	168
j. Comparaison de suites.....	168
k. Comparaison d'applications.....	169
l. Généralisation des relations de comparaison.....	170
3. Compacts, complets et connexes.....	170
a. Parties compactes.....	170
b. Image continue d'un compact.....	171
c. Normes et compacité en dimension finie.....	171
d. Parties complètes.....	171
e. Critère de Cauchy.....	172
f. Propriété des fermés emboîtés.....	172
g. Théorème du point fixe.....	172
h. Parties et applications convexes.....	172
i. Parties connexes.....	173
j. Parties précompactes.....	174
k. Théorème de Riesz.....	174
4. Continuité des applications linéaires.....	175
a. Applications linéaires continues.....	175
b. Continuité des opérations.....	175
c. Continuité en dimension finie.....	176
d. Théorème de Banach-Schauder.....	176
e. Théorème de l'isomorphisme de Banach.....	176
f. Théorème du graphe fermé.....	176

**PREUVES DU CHAPITRE II..... 177**

**CHAPITRE III. CALCUL MATRICIEL ..... 239**

<b>A. Matrices.....</b>	<b>239</b>
1. Matrices rectangulaires.....	239
a. Définition d'une matrice.....	239
b. L'espace vectoriel des matrices.....	239
c. Matrices et applications linéaires.....	240
d. Application linéaire canonique d'une matrice.....	240
e. Matrice canonique d'une application linéaire.....	240
f. Produit matriciel.....	240
g. Produit par blocs.....	241
h. Transposition.....	242
2. Matrices carrées.....	242

<i>a. L'anneau des matrices carrées</i> .....	242
<i>b. Matrices carrées et endomorphismes</i> .....	242
<i>c. Endomorphisme canonique d'une matrice</i> .....	242
<i>d. Matrices inversibles</i> .....	242
<i>e. Matrices scalaires</i> .....	242
<i>f. Matrices diagonales</i> .....	243
<i>g. Matrices triangulaires</i> .....	243
<i>h. Matrices symétriques et antisymétriques</i> .....	243
3. Matrices équivalentes et semblables.....	243
<i>a. Matrice d'une famille de vecteurs</i> .....	243
<i>b. Matrices de passage</i> .....	244
<i>c. Matrices équivalentes</i> .....	244
<i>d. Matrices semblables</i> .....	244
<i>e. Rang d'une matrice</i> .....	245
<i>f. Opérations élémentaires sur une matrice</i> .....	246
<i>g. Élimination de Gauss-Jordan</i> .....	247
<i>h. Matrice échelonnée</i> .....	247
<i>i. Trace</i> .....	247
<b>B. Déterminant</b> .....	<b>248</b>
1. Groupe symétrique.....	248
<i>a. Permutation</i> .....	248
<i>b. Orbite d'une permutation</i> .....	248
<i>c. Cycle</i> .....	248
<i>d. Transposition</i> .....	249
<i>e. Signature d'une permutation</i> .....	249
2. Applications multilinéaires.....	250
<i>a. Définition d'une application multilinéaire</i> .....	250
<i>b. Applications symétriques et antisymétriques</i> .....	250
<i>c. Applications alternées</i> .....	250
3. Définition du déterminant.....	250
<i>a. Déterminant d'une famille de vecteurs</i> .....	250
<i>b. Déterminant d'un endomorphisme</i> .....	251
4. Calcul du déterminant.....	251
<i>a. Déterminant d'une matrice carrée</i> .....	251
<i>b. Calcul par opérations élémentaires</i> .....	252
<i>c. Calcul par développement</i> .....	252
<i>d. Déterminant de Vandermonde</i> .....	253
<i>e. Déterminant circulant</i> .....	253
<i>f. Matrices de permutations</i> .....	253

<b>C. Réduction des matrices carrées.....</b>	<b>254</b>
1. Polynômes d'endomorphismes.....	254
<i>a. Sous-espaces stables.....</i>	254
<i>b. Endomorphismes nilpotents.....</i>	254
<i>c. Polynômes d'endomorphismes.....</i>	255
<i>d. Décomposition des noyaux.....</i>	255
2. Éléments propres.....	256
<i>a. Valeurs propres.....</i>	256
<i>b. Vecteurs propres.....</i>	256
<i>c. Sous-espaces propres.....</i>	256
<i>d. Éléments propres.....</i>	256
3. Réduction.....	257
<i>a. Polynôme caractéristique.....</i>	257
<i>b. Théorème de Cayley-Hamilton.....</i>	257
<i>c. Diagonalisation.....</i>	258
<i>d. Trigonalisation.....</i>	258
<i>e. Réduction simultanée.....</i>	259
<i>f. Suites récurrentes linéaires.....</i>	259
<b>PREUVES DU CHAPITRE III.....</b>	<b>261</b>
<b>CHAPITRE IV. ESPACES PRÉHILBERTIENS.....</b>	<b>297</b>
<b>A. Orthogonalité.....</b>	<b>297</b>
1. Formes quadratiques ou hermitiennes.....	297
<i>a. Transposée d'une forme bilinéaire.....</i>	297
<i>b. Matrice d'une forme bilinéaire.....</i>	297
<i>c. Formes sesquilinéaires.....</i>	298
<i>d. Transconjuguée d'une forme sesquilinéaire.....</i>	298
<i>e. Conjuguée et adjointe d'une matrice.....</i>	299
<i>f. Matrice d'une forme sesquilinéaire.....</i>	299
<i>g. Formes quadratiques ou hermitiennes.....</i>	300
<i>h. Identité de polarisation.....</i>	300
<i>i. Identité du parallélogramme.....</i>	301
<i>j. Cône isotrope et noyau.....</i>	301
<i>k. Signe d'une forme quadratique ou hermitienne.....</i>	301
<i>l. Inégalité de Cauchy-Schwarz.....</i>	301
<i>m. Inégalité de Minkowski.....</i>	301
<i>n. Matrice d'une forme quadratique ou hermitienne.....</i>	302
2. Orthogonalité.....	303
<i>a. Vecteurs orthogonaux.....</i>	303
<i>b. Parties orthogonales.....</i>	303

<i>c. Famille orthogonale</i> .....	303
<i>d. Théorème de Pythagore</i> .....	303
<i>e. Orthogonal d'une partie</i> .....	303
<i>f. Supplémentaires orthogonaux</i> .....	303
<i>g. Existence d'une base orthogonale</i> .....	304
<i>h. Orthogonal d'un sous-espace de dimension finie</i> .....	304
<b>B. Espaces préhilbertiens.....</b>	<b>304</b>
1. Produit scalaire.....	304
<i>a. Produit scalaire euclidien</i> .....	304
<i>b. Produit scalaire hermitien</i> .....	304
<i>c. Norme préhilbertienne</i> .....	304
<i>d. Espace de Hilbert</i> .....	305
<i>e. Famille orthonormée</i> .....	305
<i>f. Inégalité de Cauchy-Schwarz</i> .....	305
<i>g. Égalité de Minkowski</i> .....	305
<i>h. Identité du parallélogramme</i> .....	305
<i>i. Produit scalaire canonique</i> .....	305
2. Orthogonalité.....	306
<i>a. Orthogonal d'une partie</i> .....	306
<i>b. Projeté orthogonal sur un convexe complet</i> .....	306
<i>c. Orthogonal d'un sous-espace complet</i> .....	306
<i>d. Orthogonalisation de Schmidt</i> .....	306
<i>e. Projecteur orthogonal</i> .....	307
<i>f. Symétrie orthogonale</i> .....	307
<i>g. Endomorphisme orthogonal</i> .....	307
<i>h. Théorème de représentation de Riesz</i> .....	307
<i>i. Adjoint d'un endomorphisme</i> .....	307
<b>C. Espaces hermitiens et euclidiens.....</b>	<b>308</b>
1. Endomorphismes remarquables.....	308
<i>a. Propriétés de l'adjoint</i> .....	308
<i>b. Endomorphismes et matrices normaux</i> .....	308
<i>c. Automorphisme orthogonal</i> .....	309
<i>d. Matrice orthogonale</i> .....	309
<i>e. Endomorphisme autoadjoint et antiadjoint</i> .....	310
<i>f. Signe d'un endomorphisme autoadjoint</i> .....	310
<i>g. Norme d'un endomorphisme</i> .....	311
2. Espaces euclidiens.....	311
<i>a. Rotation et antirotation</i> .....	311
<i>b. Groupe orthogonal en dimension deux</i> .....	312
<i>c. Réduction des endomorphismes remarquables</i> .....	312

<i>d. Angle géométrique</i> .....	313
<i>e. Similitude</i> .....	313
<i>f. Orientation d'un espace euclidien</i> .....	313
<i>g. Produit vectoriel</i> .....	314
<i>h. Angle orienté</i> .....	314
<b>PREUVES DU CHAPITRE IV</b> .....	<b>317</b>
<b>CHAPITRE V. SUITES ET SÉRIES</b> .....	<b>349</b>
<b>A. Séries vectorielles</b> .....	<b>349</b>
1. Convergence et divergence d'une série .....	349
<i>a. Séries</i> .....	349
<i>b. Reste d'une série convergente</i> .....	350
<i>c. Changement d'indices</i> .....	350
2. Groupement et réarrangement de termes.....	350
<i>a. Groupement de termes</i> .....	350
<i>b. Réarrangement de termes</i> .....	350
3. Séries absolument convergentes.....	351
<i>a. Convergence absolue</i> .....	351
<i>b. Série géométrique</i> .....	351
<i>c. Théorème de Fubini</i> .....	351
<b>B. Séries réelles ou complexes</b> .....	<b>351</b>
1. Séries à termes positifs.....	351
<i>a. Convergence des séries à termes positifs</i> .....	351
<i>b. Comparaison simple</i> .....	352
<i>c. Comparaison logarithmique</i> .....	352
<i>d. Critère de d'Alembert</i> .....	352
<i>e. Sommation des relations de comparaison</i> .....	352
2. Séries à termes complexes .....	352
<i>a. Produit de Cauchy</i> .....	352
<i>b. Critère de Leibniz</i> .....	352
<b>C. Suites et séries de fonctions</b> .....	<b>353</b>
1. Suites de fonctions .....	353
<i>a. Convergence simple</i> .....	353
<i>b. Norme de la convergence uniforme</i> .....	353
<i>c. Convergence uniforme</i> .....	353
<i>d. Convergence uniforme sur tout compact</i> .....	353
2. Séries de fonctions .....	354
<i>a. Convergence uniforme d'une série</i> .....	354
<i>b. Convergence normale</i> .....	354

3. Limites uniformes.....	354
<i>a. Interverson des limites.....</i>	354
<i>b. Continuité d'une limite uniforme.....</i>	354
<i>c. Théorème de Weierstrass.....</i>	355
<i>d. Equicontinuité.....</i>	355
<i>e. Théorème d'Arzela-Ascoli.....</i>	355
<b>PREUVES DU CHAPITRE V.....</b>	<b>357</b>
<b>CHAPITRE VI. DÉRIVATION ET INTÉGRATION.....</b>	<b>369</b>
<b>A. Dérivation.....</b>	<b>369</b>
1. Applications vectorielles.....	369
<i>a. Dérivée.....</i>	369
<i>b. Propriétés de la dérivation.....</i>	370
<i>c. Inégalité des accroissements finis.....</i>	370
<i>d. Classe de régularité.....</i>	370
2. Applications réelles ou complexes.....	371
<i>a. Dérivées usuelles.....</i>	371
<i>b. Optimisation.....</i>	371
<i>c. Théorème de Rolle.....</i>	371
<i>d. Formule des accroissements finis.....</i>	371
<i>e. Difféomorphisme.....</i>	372
<i>f. Formule de Taylor-Lagrange.....</i>	372
<i>g. Convexité.....</i>	372
<i>h. Règle de l'hôpital.....</i>	372
<b>B. Intégration sur segment.....</b>	<b>373</b>
1. Intégrale.....	373
<i>a. Subdivision d'un segment.....</i>	373
<i>b. Continuité par morceaux.....</i>	373
<i>c. Application en escalier.....</i>	373
<i>d. Intégrale.....</i>	373
<i>e. Propriétés de l'intégration.....</i>	374
2. Relation entre dérivée et intégrale.....	375
<i>a. Primitive.....</i>	375
<i>b. Classe de régularité par morceaux.....</i>	375
<i>c. Intégration par parties.....</i>	376
<i>d. Changement de variables.....</i>	376
<i>e. Formule de Taylor avec reste intégral.....</i>	376
<i>f. Formule de Taylor-Young.....</i>	376
<i>g. Développements limités.....</i>	376

<i>h. Méthode de Newton</i> .....	377
<i>i. Intégration ou dérivation d'une limite</i> .....	377
<b>C. Intégration sur intervalle</b> .....	<b>378</b>
1. Applications vectorielles.....	378
<i>a. Intégrale impropre</i> .....	378
<i>b. Linéarité et croissance de l'intégrale</i> .....	378
<i>c. Relation de Chasles</i> .....	379
<i>d. Intégration par parties</i> .....	379
2. Applications réelles positives.....	379
<i>a. Intégrale impropre d'une application positive</i> .....	379
<i>b. Suite exhaustive d'un intervalle</i> .....	379
<i>c. Intégrales de Riemann</i> .....	379
3. Applications intégrables.....	380
<i>a. Définition d'une application intégrable</i> .....	380
<i>b. Partie positive et partie négative</i> .....	380
<i>c. Propriétés des applications intégrables</i> .....	380
<i>d. Polynômes orthogonaux</i> .....	380
<i>e. Méthode de Gauss-Legendre</i> .....	381
<i>f. Changement de variables</i> .....	381
<i>g. Intégrabilité et relations de comparaison</i> .....	381
<i>h. Intégration des relations de comparaison</i> .....	382
<i>i. Comparaison entre série et intégrale</i> .....	382
<b>PREUVES DU CHAPITRE VI</b> .....	<b>383</b>
<b>CHAPITRE VII. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE</b> .....	<b>411</b>
<b>A. Développement en série entière</b> .....	<b>411</b>
1. Série entière et rayon de convergence.....	411
<i>a. Série entière</i> .....	411
<i>b. Rayon de convergence</i> .....	411
<i>c. Lemme d'Abel</i> .....	412
<i>d. Calcul du rayon de convergence</i> .....	412
<i>e. Opérations sur les séries entières</i> .....	412
2. Intégration et dérivation.....	413
<i>a. Continuité de la somme</i> .....	413
<i>b. Intégration d'une série entière</i> .....	413
<i>c. Dérivation d'une série entière</i> .....	413
3. Développement en série entière.....	413
<i>a. Fonctions développables</i> .....	413
<i>b. Série de Taylor</i> .....	414

4. Exponentielle .....	414
<i>a. Exponentielle dans une algèbre complète</i> .....	414
<i>b. Exponentielle de matrices</i> .....	414
<i>c. Applications trigonométriques et hyperboliques</i> .....	415
<i>d. Exponentielle réelle</i> .....	415
<i>e. Logarithme</i> .....	415
<i>f. Applications trigonométriques et hyperboliques réelles</i> .....	416
<i>g. Exponentielle complexe</i> .....	417
<i>h. Extension de la notion de puissance</i> .....	417
<i>i. Vitesses de convergence</i> .....	418
<i>j. Série du binôme de Newton</i> .....	418
<b>B. Développement en série de Fourier</b> .....	<b>419</b>
1. Applications périodiques et régularisées .....	419
<i>a. Application périodique</i> .....	419
<i>b. Application régularisée</i> .....	419
<i>c. Produit scalaire</i> .....	419
2. Polynômes et séries trigonométriques .....	420
<i>a. Extension de la notion de série</i> .....	420
<i>b. Polynôme trigonométrique</i> .....	420
<i>c. Théorème de Weierstrass trigonométrique</i> .....	420
<i>d. Inégalité de Bessel</i> .....	420
<i>e. Application paire ou impaire</i> .....	420
<i>f. Série trigonométrique</i> .....	421
3. Développement en série de Fourier .....	421
<i>a. Coefficients de Fourier</i> .....	421
<i>b. Série de Fourier</i> .....	422
<i>c. Théorème de Dirichlet</i> .....	422
<i>d. Applications développables</i> .....	422
<i>e. Convergence en moyenne quadratique</i> .....	422
<i>f. Égalité de Parseval</i> .....	422
<b>PREUVES DU CHAPITRE VII</b> .....	<b>423</b>
<b>CHAPITRE VIII. COMPLÉMENTS DIVERS</b> .....	<b>445</b>
<b>A. Calcul différentiel</b> .....	<b>445</b>
1. Applications différentiables .....	445
<i>a. Fonctions partielles</i> .....	445
<i>b. Dérivée suivant un vecteur</i> .....	445
<i>c. Dérivées partielles</i> .....	446
<i>d. Applications différentiables</i> .....	446



<i>e. Matrice Jacobienne</i> .....	447
<i>f. Composition des différentielles</i> .....	447
<i>g. Dérivée partielle d'une composition</i> .....	448
<i>h. Inégalité des accroissements finis</i> .....	448
2. Applications continument différentiables.....	448
<i>a. Classe de régularité</i> .....	448
<i>b. Théorème de Schwarz</i> .....	449
<i>c. Difféomorphisme</i> .....	449
<i>d. Théorème d'inversion locale</i> .....	449
<i>e. Théorème d'inversion globale</i> .....	450
<i>f. Théorème des fonctions implicites</i> .....	450
3. Formules de Taylor et optimisation.....	450
<i>a. Formule de Taylor avec reste intégral</i> .....	450
<i>b. Formule de Taylor-Young</i> .....	450
<i>c. Matrice hessienne</i> .....	450
<i>d. Optimisation</i> .....	451
<b>B. Calcul intégral.....</b>	<b>451</b>
1. Espaces mesurés.....	451
<i>a. Tribu</i> .....	451
<i>b. Somme d'une famille positive et dénombrable</i> .....	452
<i>c. Mesure</i> .....	452
<i>d. Mesure extérieure de Lebesgue</i> .....	453
<i>e. Lebesguiens</i> .....	453
<i>f. Boréliens</i> .....	453
<i>g. Mesure de Lebesgue</i> .....	454
<i>h. Mesure du dénombrement</i> .....	454
2. Applications intégrables.....	454
<i>a. Applications mesurables</i> .....	454
<i>b. Extension de la notion de limite</i> .....	455
<i>c. Application indicatrice</i> .....	456
<i>d. Applications étagées</i> .....	456
<i>e. Intégrale de Lebesgue</i> .....	456
<i>f. Applications Lebesgue intégrables</i> .....	457
<i>g. Propriétés de l'intégrale de Lebesgue</i> .....	457
<i>h. Proposition vraie presque partout</i> .....	457
3. Convergence dominée.....	458
<i>a. Convergence en moyenne</i> .....	458
<i>b. Théorème de convergence monotone</i> .....	459
<i>c. Théorème de convergence dominée</i> .....	459
<i>d. Théorème de Fischer-Riesz</i> .....	459
<i>e. Extension de la notion d'intégrale</i> .....	459

<i>f. Continuité sous le signe somme</i> .....	460
<i>g. Dérivation sous le signe somme</i> .....	460
4. Produit d'espaces mesurés .....	460
<i>a. Classe de Dynkin</i> .....	460
<i>b. Théorème d'unicité des mesures</i> .....	461
<i>c. Produit de mesures</i> .....	461
<i>d. Théorème de Fubini</i> .....	461
<i>e. Changement de variables</i> .....	462
<b>C. Équations différentielles .....</b>	<b>462</b>
1. Généralités .....	462
<i>a. Équation différentielle</i> .....	462
<i>b. Solution par morceaux approchée</i> .....	462
<i>c. Méthode d'Euler</i> .....	463
<i>d. Théorème de Cauchy-Peano</i> .....	463
<i>e. Application localement lipschitzienne</i> .....	463
<i>f. Théorème de Cauchy-Lipschitz</i> .....	464
<i>g. Équation différentielle scalaire</i> .....	464
<i>h. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire</i> .....	465
2. Systèmes différentiels linéaires .....	465
<i>a. Structure de l'ensemble des solutions</i> .....	465
<i>b. Matrice wronskienne</i> .....	465
<i>c. Méthode de variation des constantes</i> .....	465
<i>d. Systèmes linéaires à coefficients constants</i> .....	466
3. Équations différentielles scalaires linéaires .....	466
<i>a. Structure de l'ensemble des solutions</i> .....	466
<i>b. Matrice wronskienne</i> .....	467
<i>c. Méthode de variation des constantes</i> .....	467
<i>d. Équations linéaires du premier ordre</i> .....	467
<i>e. Équations linéaires du second ordre</i> .....	467
<i>f. Équations linéaires à coefficients constants</i> .....	468
<b>D. Analyse complexe.....</b>	<b>468</b>
1. Holomorphie .....	468
<i>a. Applications holomorphes</i> .....	468
<i>b. Applications analytiques</i> .....	469
<i>c. Principe du prolongement analytique</i> .....	469
<i>d. Zéros d'une application analytique</i> .....	469
<i>e. Conditions de Cauchy-Riemann</i> .....	470
<i>f. Théorème d'inversion locale</i> .....	470
2. Intégrales curvilignes .....	470
<i>a. Courbes</i> .....	470
<i>b. Chemins</i> .....	471

<i>c. Intégrale sur un chemin</i> .....	472
<i>d. Primitives holomorphes</i> .....	472
<i>e. Théorème de Cauchy pour un convexe</i> .....	472
<i>f. Indice d'un point</i> .....	472
<i>g. Formule de Cauchy pour un convexe</i> .....	473
<i>h. Inégalité de Cauchy</i> .....	473
<i>i. Théorème de Morera</i> .....	473
<i>j. Holomorphie d'une limite</i> .....	473
<i>k. Principe du maximum</i> .....	473
<i>l. Holomorphie sous le signe somme</i> .....	474
3. Théorème des résidus.....	474
<i>a. Lacets homotopes</i> .....	474
<i>b. Théorème de Cauchy</i> .....	474
<i>c. Formule de Cauchy</i> .....	474
<i>d. Singularités</i> .....	474
<i>e. Résidus</i> .....	475
<i>f. Théorème des résidus</i> .....	475
<b>E. Probabilités</b> .....	<b>476</b>
1. Espaces probabilisés .....	476
<i>a. Probabilité</i> .....	476
<i>b. Suites monotones d'évènements</i> .....	476
<i>c. Probabilité conditionnelle</i> .....	477
<i>d. Évènements indépendants</i> .....	477
<i>e. Tribus indépendantes</i> .....	477
2. Variables aléatoires.....	478
<i>a. Variable aléatoire</i> .....	478
<i>b. Variables aléatoires indépendantes</i> .....	478
<i>c. Espérance</i> .....	478
<i>d. Variance</i> .....	478
<i>e. Loi de probabilité</i> .....	479
<i>f. Théorème de transfert</i> .....	479
<i>g. Fonction de répartition</i> .....	479
<i>h. Densité de probabilité</i> .....	480
3. Loïs de probabilité usuelles .....	480
<i>a. Loi uniforme discrète</i> .....	480
<i>b. Loi uniforme continue</i> .....	480
<i>c. Loi de Bernoulli</i> .....	480
<i>d. Loi binomiale</i> .....	480
<i>e. Loi de Poisson</i> .....	481
<i>f. Loi géométrique</i> .....	481

g. Loi exponentielle .....	481
h. Loi normale .....	481
4. Théorèmes de convergence .....	482
a. Moyenne de Cesàro d'une suite .....	482
b. Lemme de Kronecker .....	482
c. Convergence presque sûre .....	482
d. Convergence en probabilité .....	482
e. Inégalité de Markov .....	483
f. Loi faible des grands nombres .....	483
g. Inégalité de Kolmogorov .....	483
h. Théorème de Kolmogorov .....	483
i. Loi forte des grands nombres .....	483
j. Applications à support compact .....	484
k. Convergence en loi .....	484
l. Fonction caractéristique d'une variable .....	485
m. Théorème de Lévy .....	485
n. Théorème limite central .....	485
<b>PREUVES DU CHAPITRE VIII .....</b>	<b>487</b>
<b>NOTATIONS SPÉCIFIQUES .....</b>	<b>579</b>
<b>INDEX .....</b>	<b>585</b>