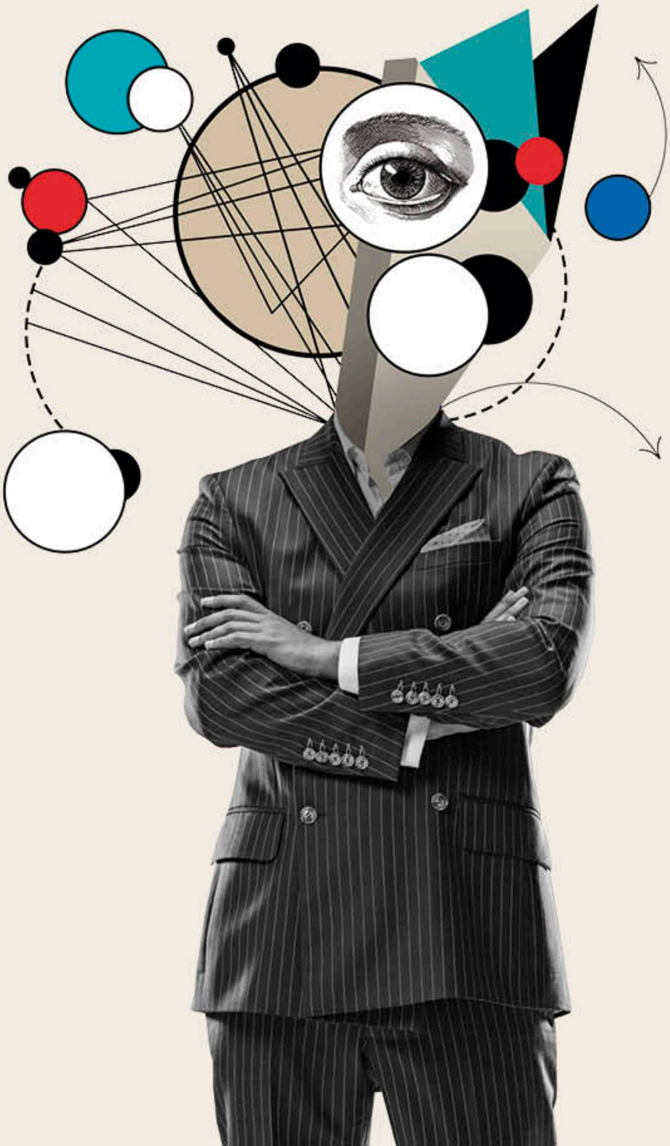
LA PHILOSOPHIE CONTEMPORAINE

XXe & XXIe siècles

Alain Séguy-Duclot



ellipses

I.
Un nouveau programme rationaliste

L'histoire de la philosophie du XX^{e} siècle s'ordonne principalement à partir de l'émergence à la fin du XIX^{e} siècle d'un nouveau programme rationaliste : celui d'une refondation des mathématiques, et plus précisément de l'arithmétique, sur la logique, ce qui conduit à remettre en cause la logique dans son sens aristotélicien, et plus largement, le sens même du *logos* grec.

Pour comprendre cette émergence, il importe d'en saisir la source : le programme d'arithmétisation des mathématiques[1] qui domine les mathématiques du XIX^{e} siècle. Or, ce programme résulte lui-même de tout un processus de rénovation des mathématiques engagé au XVI^{e} siècle, dont il convient en premier lieu de saisir (rapidement) le sens. Le lien du rationalisme contemporain à la pensée moderne en sera éclairé.

1. Repenser le sens de la révolution moderne

On peut identifier l'origine première[2] du programme rationaliste au pythagorisme, qui interprète les nombres entiers comme des principes ontologiques – le principe suprême étant l'unité –, si bien qu'explorer *la rationalité logico-mathématique* nous donnerait accès à *l'essence de l'être.*

Or, ce modèle a été mis en échec par la crise des irrationnelles, à savoir la découverte, impliquée par le théorème de Pythagore, de grandeurs incommensurables à l'unité, comme la diagonale d'un carré de côté 1 qui est égale à $\sqrt{2}$. La solution a été de les comprendre non comme des *nombres* mais comme des *grandeurs* au sens large, dont le sens est *géométrique* (une diagonale) et non *arithmétique* (un nombre). Dès lors, les mathématiques doivent s'unifier non plus sur l'arithmétique, comme le pensaient les pythagoriciens, mais sur la géométrie. En accord avec la compréhension hypothétique de la science chez Aristote (-384/-322), les *Éléments* d'Euclide (écrits vers 300 av. J.-C.) opèrent une axiomatisation de la géométrie qui permet cette unification nouvelle des mathématiques. Le modèle aristotélo-euclidien (géométrocentrique) s'impose en mathématiques jusqu'à la Renaissance, parallèlement au modèle aristotélo-ptolémaïque (géocentrique) en physique.

Leur remise en cause est quasi concomitante. On insiste généralement sur la révolution qui intervient en physique avec le passage du modèle géocentrique de Ptolémée (vers 100-168) au modèle héliocentrique de Nicolas Copernic (1473-1543). Elle est de fait plus intuitive. Mais la révolution qui intervient en mathématiques est de plus grande ampleur, et il s'agit d'en saisir le sens, généralement manqué.

Ainsi lorsque Galilée (1564-1642) affirme que le langage de la nature est *géométrique*, il n'opère aucune révolution théorique, comme l'a cru Alexandre Koyré (1892-1964) qui, dans ses *Études Galiléennes* (1939) et *Du monde clos à l'univers infini* (1957), développe l'interprétation par Edmund Husserl (1859-1938) du rôle fondateur de Galilée pour la pensée moderne[3]. En fait, Galilée prend acte de l'effondrement du modèle aristotélo-ptolémaïque dominant au Moyen Âge, pour *faire retour* aux modèles pré-aristotéliciens, en l'occurrence à l'intuition première du rationalisme pythagoricien[4], et il le fait dans le cadre de sa réinterprétation euclidienne, puisque le terme *géométrie* a pour lui le sens général de *mathématique*[5].

La révolution principale, constitutive de la modernité en sciences, se situe ailleurs. Elle intervient dans la naissance de l'algèbre moderne, qui conduit à une rénovation radicale des mathématiques, et *donc de la physique* puisque la physique moderne est mathématisée. Cette révolution correspond à un renversement du primat euclidien de la géométrie au profit de l'arithmétique, lequel n'a pas le sens d'un simple retour au pythagorisme dans la mesure où il s'agit d'une arithmétique nouvelle, à la fois *universelle* et *abstraite*.

2. L'universalisation de l'arithmétique

L'algèbre comprise au sens large peut être identifiée à la théorie des équations. Mais on peut définir plus strictement l'algèbre comme un calcul portant non plus sur les nombres, mais sur des signes abstraits désignant des nombres. On passe ainsi d'une arithmétique au sens strict à un calcul sémiotique, appelé *calcul algébrique*. Les travaux antérieurs sur la théorie des équations peuvent alors être compris comme relevant d'une *proto-algèbre*, et le véritable « père de l'algèbre », celui qui a inventé ce calcul, n'est autre que François Viète (1540-1603).

Au début de son *Introduction dans l'art analytique* (1591), Viète identifie son travail à la construction d'une *algèbre nouvelle*. Dans les formes proto-algébriques, $2x^2$ était écrit 2^2 ou 2Q. L'inconnue[6] en tant que telle n'apparaît pas. Viète la fait apparaître en la désignant par la voyelle A, les grandeurs indéterminées (ou *paramètres* de l'équation[7]) étant désignées par des consonnes.

Une « existence » mathématique positive est ainsi accordée à des grandeurs encore inconnues ou indéterminées. De ce fait, s'opère un désinvestissement ontologique du sens mathématique de « l'existence », déjà à l'œuvre dans la découverte du nombre zéro et des nombres négatifs. Ce qui suscite une résistance[8]. Au XVIIe siècle, Blaise Pascal (1623-1662), l'un des plus grands mathématiciens de son temps, rejette encore les nombres négatifs : « j'en sais qui ne peuvent comprendre que qui de zéro ôte 4 reste 0 »[9].

En écrivant des équations désignant formellement les inconnues et les paramètres, Viète construit un calcul abstrait opérant sur les signes abstraits, et non plus sur les nombres. Grâce à cette approche formelle, il devient possible d'élaborer des méthodes générales de résolution des équations. Ainsi résoudre une équation de la forme[10] $ax^2 + bx = c$ permet de résoudre une infinité d'équations selon les valeurs données aux paramètres. L'algèbre correspond ainsi à une arithmétique formelle.

L'algèbre formelle de Viète reste toutefois archaïque. Par exemple, pour x^3, il écrit[11] encore « A *cubus* » alors que Nicolas Chuquet (1445-1487) ou Raphaël Bombelli (1526-1572) portaient déjà les chiffres en exposant. De plus, Viète est gêné par les puissances supérieures à trois[12], car il continue d'accorder un primat à la géométrie, qui n'admet que trois dimensions, et d'interpréter géométriquement les problèmes algébriques.

René Descartes (1596-1650) est celui qui élabore l'écriture moderne des puissances successives de l'inconnue : x, x^2, x^3, x^4, etc., évitant toute gêne pour les puissances supérieures à 3. De plus, Descartes choisit les dernières lettres de l'alphabet pour désigner les inconnues d'une équation, et les premières pour désigner les paramètres. Descartes synthétise ainsi les avancées de l'algèbre au XVIe siècle pour mettre en place l'écriture algébrique moderne. On peut alors parler d'*arithmétique universelle*, titre donné par Isaac Newton (1642-1727) à son traité d'algèbre de 1707.

3. La géométrie algébrique ou le rétablissement du primat de l'arithmétique sur la géométrie

Or, ce processus d'universalisation de l'arithmétique dans la construction de l'algèbre formelle – qui se met en place au XVIe siècle pour se déployer au XVIIIe et au XIXe siècle – permet au XVIIe siècle de renverser le primat de la géométrie instauré dans les *Éléments* d'Euclide.

En effet, Descartes ne se contente pas de compléter la découverte de Viète, il en tire l'invention de la *géométrie algébrique*, appelée aussi *géométrie analytique* à la fin du XVIIIe siècle. Le projet théorique de Descartes dans sa *Géométrie* de 1637[13], est révolutionnaire[14] : il s'agit de *réduire la géométrie à un calcul*, grâce à l'algèbre nouvelle.

Le traitement analytique d'un problème géométrique engage une représentation graphique. Descartes définit deux axes *perpendiculaires* et *indépendants* par rapport à la figure considérée[15] : l'axe horizontal des abscisses (notées x) et l'axe vertical des ordonnées (notées y)[16]. Chaque point se voit associer un couple (x, y), x étant sa valeur en abscisse et y sa valeur en ordonnée.

Or, le rapport entre ces valeurs peut s'exprimer dans une équation : « on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités inconnues x ou y, et chercher l'autre par cette équation »[17]. Et une équation peut être associée à chaque courbe. Par exemple, l'équation $y = x$ est la droite passant par les points (0, 0) et (1, 1). L'équation $y = x^2$ est la parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et passant par (0, 0) et (1, 1), etc.

Il devient alors possible pour Descartes de transcrire un problème géométrique sous la forme d'une équation articulant des quantités connues à des quantités inconnues. La résolution d'un problème géométrique devient la résolution de l'équation.

Or, dans l'équation, la variation de *x* entraîne une variation correspondante de *y* : la quantité *y* est donc *fonction de* la quantité *x*. La géométrie algébrique découvre ainsi un nouveau concept mathématique, celui de *fonction*, central pour les mathématiques au XVIIIe siècle. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en propose une première définition dès 1673[18].

Par exemple, l'équation $y = x^2$ met en relation deux quantités. On peut formaliser cette relation grâce à la fonction *f* en écrivant[19] : $y = f(x)$, avec $f(x) = x^2$. Le développement du calcul algébrique prend peu à peu le pas sur la géométrie : pour étudier les propriétés d'une courbe, il suffit d'étudier son équation correspondante, et donc la fonction qu'elle exprime. Le concept de fonction est désormais le concept unificateur des mathématiques[20].

Grâce à la géométrie algébrique, un nouveau projet d'unification des mathématiques peut émerger, qui va ébranler les frontières traditionnelles entre l'arithmétique et la géométrie. Bien plus, par-delà cette unification des mathématiques, il devient possible de penser l'unification de l'ensemble des sciences sous *la* mathématique (unifiée), et donc une mathématique universelle (*mathesis universalis*) comme *science de l'ordre et de la mesure*. Descartes en théorise la notion dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (1629)[21].

4. L'invention du calcul différentiel

Une fois la notion de fonction définie, elle devient un objet mathématique que l'on peut étudier. Leibniz définit la dérivée d'une fonction *f* au point *x*. Cette dérivée peut être interprétée *géométriquement* comme la *pente de la tangente* à la courbe au point *x* (c'est-à-dire son taux d'accroissement : si elle est positive, la fonction est croissante ; si elle est négative, la fonction est décroissante), ou encore *physiquement* (en assimilant la courbe à la trajectoire d'un mobile) comme la *vitesse instantanée* du mobile sur la courbe au point *x*. En cinématique, la dérivée seconde correspond à l'*accélération* (à la variation de la vitesse en un point). En répétant cette opération de dérivation, on peut obtenir la dérivée troisième, quatrième, etc.

Grâce au calcul différentiel, on peut faire intervenir dans une même équation la fonction que l'on recherche ainsi qu'une ou plusieurs de ses dérivées, première, seconde, etc. Cette sorte d'équation s'appelle une *équation différentielle*. Résoudre une équation différentielle conduit à trouver l'ensemble des fonctions qui la vérifient.

L'usage de ces équations en physique, à la suite de Newton, a des conséquences considérables. Car si la fonction recherchée désigne le mouvement d'un système physique, alors que ses dérivées désignent les variations de ce mouvement, l'équation différentielle donne *la relation entre ce mouvement et ses variations au cours du temps*. Or, si l'on connaît les conditions initiales d'un système physique et si l'on peut modéliser son évolution à l'aide d'un système d'équations différentielles admettant une solution unique, on peut calculer avec une *certitude parfaite* l'évolution de ce système physique au cours du temps. Son devenir devient alors *parfaitement prédictible*.

Une mathématisation parfaite de la physique semble ainsi possible, conformément au rêve rationaliste des pythagoriciens. Et l'on peut théoriser un *déterminisme total*, en radicalisant le sens du principe de causalité. Par « principe de causalité », il ne s'agit plus simplement d'affirmer que *tout effet a une cause*, ou qu'*il y a plus d'être dans la cause que dans l'effet*, ou encore que *les mêmes causes produisent les mêmes effets*. Désormais, à la suite de Leibniz, on affirme que *tout ce qui arrive a une cause suffisante*, c'est-à-dire une cause capable de *déterminer totalement* son (ou ses) effet(s).

Martin Heidegger (1899-1976) s'interroge dans *Le Principe de raison* (1957) sur le « mystère » de la formulation tardive chez Leibniz du principe de raison suffisante. Cette idée était pourtant présente dès les débuts de la philosophie grecque : pourquoi une formulation aussi tardive d'un tel principe ? Mais il n'y a pas de mystère : passer d'un simple rêve à une formulation explicite n'a été possible que par l'invention de la théorie des équations différentielles. Et pour cela, la rationalité mathématique occidentale a eu besoin de 2 300 ans…

5. L’invention du calcul intégral

Or, parallèlement au *calcul différentiel*, se développe le *calcul intégral*. Soit une courbe, correspondant à une fonction $f(\mathrm{x})$. Le problème est de calculer l’aire entre cette courbe, l’axe horizontal des abscisses, et les droites verticales passant par les points *a* et *b* appartenant à l’axe des abscisses. La méthode de Leibniz est de diviser l’intervalle $[a, b]$ en *n* intervalles infiniment petits à l’aide de points infiniment proches : x_1, x_2... Il peut alors diviser l’aire totale en une série d’aires rectangulaires infiniment petites[22] $f(x_i)\ (x_{i+1} - x_i)$, dont il fait la sommation. Le résultat approche infiniment l’aire totale. Pour la sommation de termes infinitésimaux, Leibniz utilise le signe ∫. L’aire totale recherchée peut donc s’écrire[23] : $\int f(x)\, dx$, entre *a* et *b*.

Or, l’intégration est la fonction réciproque[24] de la dérivation. Le calcul intégral et le calcul différentiel forment ainsi deux parties complémentaires d’un même calcul, le *calcul infinitésimal*, lequel porte sur les quantités infiniment petites. Grâce au progrès de la géométrie analytique ou algébrique, devenue une théorie des fonctions, la théorie mathématique parvient ainsi à maîtriser l’infini.

Pourtant, la rigueur et la validité des concepts fondamentaux du calcul infinitésimal ont été rapidement mis en doute. Le problème est celui du statut ontologique des infiniment petits. Ne sont-ils pas de simples fictions, au même titre que les racines imaginaires ? Leibniz l’affirme en 1716 dans ce qui est peut-être son dernier écrit[25] :

> Le calcul infinitésimal est utile, quand il s’agit d’appliquer les mathématiques à la physique, cependant ce n’est point par là que je prétends rendre compte de la nature des choses ? Car je considère les quantités infinitésimales comme des fictions utiles.[26]

En 1734, George Berkeley (1685-1753) critique l’ambiguïté du statut ontologique des infinitésimaux, entre le quelque chose et le rien, entre l’être et le non-être. Cette critique ontologique – qui évoque celle des adversaires des nombres négatifs – fait apparaître le flou conceptuel constitutif du calcul infinitésimal. Si un tel flou a pu, initialement, avoir un sens heuristique, à terme, il menace d’entraver le développement d’un tel calcul.

Ces critiques déclenchent ce que l'on peut appeler une « crise des infinitésimaux ». Cette dernière peut être interprétée comme une reprise de la crise théorique produite par les paradoxes de Zénon d'Élée (vers -490/-430) sur le mouvement, lesquels portaient déjà sur les difficultés rationnelles liées à la sommation des infiniment petits.

Afin de surmonter cette crise, le calcul infinitésimal va se livrer à deux opérations : 1- une dé-géométrisation et 2- une dés-ontologisation. Pour cela, il va développer son formalisme algébrique et ainsi accentuer l'arithmétisation des mathématiques.

6. Dégéométrisation et arithmétisation de l'analyse

La crise des infinitésimaux dure globalement pendant tout le XVIII^e siècle. Elle ne parvient pas à entraver le développement du calcul infinitésimal, mais en fragilise les fondements théoriques.

Sa résolution intervient au XIX^e siècle avec la définition strictement formelle du concept de limite, sans aucun recours à l'intuition, opérée par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et par Karl Weierstrass (1815-1897). En 1821, au début de son cours d'analyse à l'école Polytechnique, Cauchy identifie une quantité infiniment petite à une suite qui tend vers zéro. Toutefois, les formulations de Cauchy – par exemple, « s'approchent indéfiniment » – se réfèrent toujours à une intuition spatiale. Weierstrass donne sa rigueur définitive à l'analyse en formalisant strictement les intuitions de Cauchy. Il définit ainsi la notion de limite : *la suite numérique de terme général* u_n *converge vers une limite* l *si, pour tout nombre arbitrairement petit* ε, *on peut associer un rang* N *tq si* $n > N$, *alors* $|u_n - l| < \varepsilon$. Cette définition ne fait plus appel à l'intuition et ne fait plus mention de la notion problématique de quantité « infiniment petite ». Il n'y a plus que des relations quantifiables entre des valeurs numériques.

Weierstrass donne alors une définition rigoureuse (*dé-géométrisée et arithmétisée*) de la continuité d'une fonction, *sans faire référence à sa représentation graphique* : *une fonction* f *est continue au point* x_0 *si, pour tout nombre* $\varepsilon > 0$, *on peut associer un nombre* $\delta > 0$, *tq* $|x - x_0| < \delta$