

APPLICATIONS EN ÉLECTRO- MAGNÉTISME

Cours et problèmes
résolus

Dominique Jacob



Chapitre 1

LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME

On présente, sans démonstrations, les paramètres et lois de l'électricité qui seront utilisées dans la suite de l'ouvrage. Il existe des lois fondamentales qui ne sont pas présentées ici.

Premièrement pour aborder la modélisation une maîtrise des outils mathématiques de base présentés à l'annexe 1 est requise.

1 Charge, champ et potentiel électrique

La matière comporte des particules élémentaires caractérisées par leur charge électrique q .

Soient deux charges électriques ponctuelles, q_1 située au point A_1 et q_2 située au point A_2 . Il existe une force d'attraction ou de répulsion (la charge peut être positive ou négative) entre ces deux charges : la force de **Coulomb** (selon Charles-Augustin Coulomb, 1736-1806).

Dans le vide la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u} \text{ avec } r = A_1.A_2 \text{ et } \vec{u} = \frac{\overline{A_1.A_2}}{A_1.A_2} \text{ (vecteur unitaire de } A_1$$

vers A_2) et la charge q_2 exerce la force opposée sur la charge q_1

Deux charges de même signe se repoussent, deux charges de signes opposés s'attirent.

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ est nommé permittivité diélectrique du vide et s'exprime en farad par mètre (F/m) dans le système international.

Soit une répartition de N charges q_i ($1 \leq i \leq N$). Chaque charge q_i est placée au point A_i et une autre charge q est placée au point M .

La force exercée sur la charge q par la charge q_i placée au point A_i est

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q}{(A_i.M)^2} \frac{\overline{A_i.M}}{A_i.M}$$

La force totale exercée sur la charge q est la somme de toutes les forces exercées par chaque charge :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q}{(A_i \cdot M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i \cdot M}}{A_i \cdot M} = q \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(A_i \cdot M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i \cdot M}}{A_i \cdot M}$$

On définit le vecteur: $\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{(A_i \cdot M)^2} \frac{\overrightarrow{A_i \cdot M}}{A_i \cdot M}$

\vec{E} est le champ électrique créé au point M par la répartition de charge. La force exercée sur la charge q est $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

F est en newton (N)

q en coulomb (C)

E en volt par mètre (V/m)

Le champ électrique \vec{E} caractérise l'influence de toutes les charges qui ont un effet sur la charge q .

Soit une charge q placée au point O . Le champ électrique créé au point M tel que la distance $OM = r$ est: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$.

\vec{e}_r est le vecteur unitaire radial au point M défini sur la figure 1.

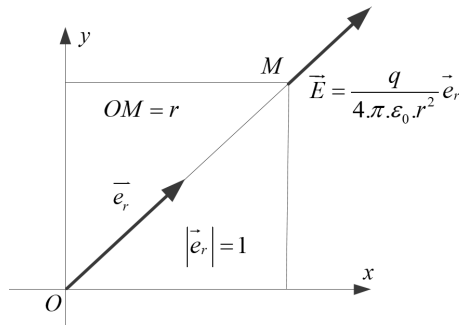


figure 1

Si on pose $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ on a $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$

On admet que l'on peut généraliser cette relation à l'aide de l'opérateur gradient (pour cela se reporter à l'annexe sur les coordonnées sphériques)

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}(V) \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

V est nommé potentiel électrique, il s'exprime en volt.

On dit que le champ électrique \vec{E} dérive du potentiel V .

La relation $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$ montre que \vec{E} s'exprime en V/m

Le calcul du potentiel qui est scalaire est bien plus aisé que le calcul direct du champ qui est vectoriel.

2 Le champ magnétique

2.1 Postulat de Biot et Savart

L'observation qu'il existe des forces qui s'exercent à distance entre des charges en mouvement (des courants électriques) a conduit, pour modéliser ces forces, à postuler à l'existence d'un champ \vec{B} , le **champ magnétique**, créé par les courants. Les forces mesurables seront reliées à ce champ magnétique.

Le postulat est le suivant.

Un élément de circuit de longueur dl , placé au point P , parcouru par le courant i , (on définit ainsi le vecteur $i.d\vec{P} = i.d\vec{l}$ orienté par le courant i) crée au point M le champ magnétique (cf. figure 2) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i.d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ est la perméabilité magnétique du vide, c'est une constante. L'unité est le *Henry/m*

Le champ magnétique s'exprime en **Tesla (T)**, le courant en Ampère, les distances en mètre.

On écrit aussi : $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i.d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$ avec $r = PM$ la distance entre les points, et $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$ le vecteur unitaire pointant de P vers M .

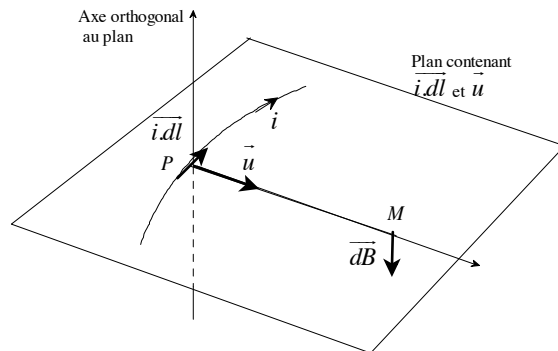


figure 2

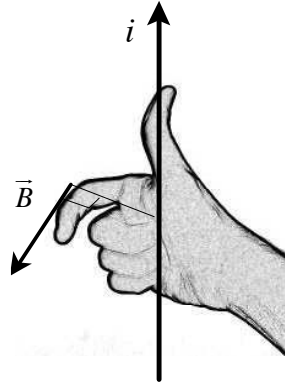


figure 3

La relation de Biot et Savart donne l'intensité et le sens du vecteur $\vec{B} = \int_{\text{circuit}} d\vec{B}$. Le calcul complet du module est en général fastidieux et souvent inutile mais la détermination du sens repose sur cette relation. C'est la **règle de la main droite** (cf. figure 3). **En prenant le fil électrique dans la main droite avec le pouce dans le sens du courant, l'index, placé au point considéré indique le sens du champ magnétique à ce point.**

On nomme **ligne de champ** une courbe pour laquelle le champ magnétique \vec{B} est tangent en tout point. (c'est le lieu des points M tels que $d\vec{M} = k \cdot \vec{B}$). Pour le champ magnétique les lignes de champ sont des courbes fermées (cf. figure 4) qui entourent le conducteur électrique siège du courant. Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer la règle donnant la direction du champ pour différents points autour du conducteur.

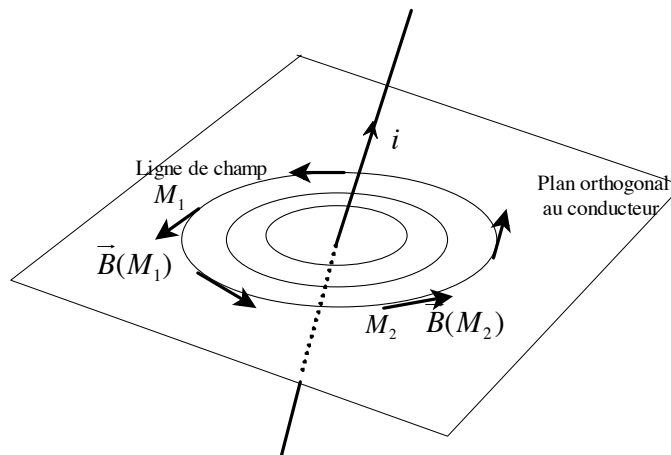


figure 4

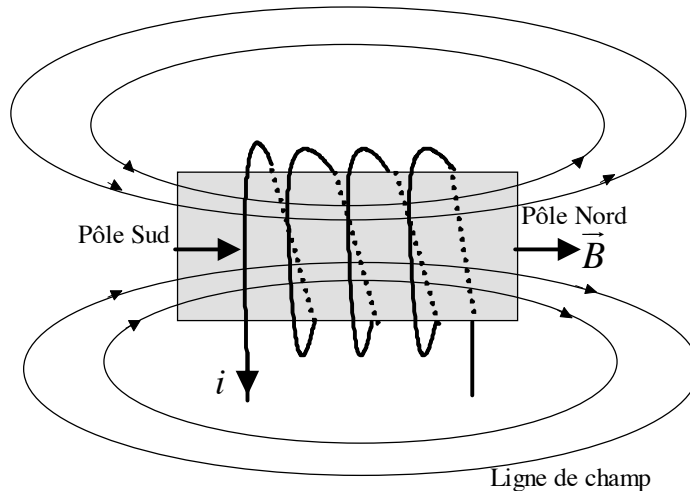


figure 5

Si on réalise (cf. figure 5) un circuit électrique comportant plusieurs spires placées côte à côte (nommé solénoïde ou simplement bobine) les lignes de champ doivent entourer les courants donc les spires et être fermées, elles ont l'allure de la figure 5. La face d'où le champ magnétique « sort » de la bobine est nommée « pôle Nord » et la face où il « rentre » dans la bobine est nommée « pôle Sud ».

2.2 Le flux du champ magnétique : définition

Soit un contour élémentaire fermé et orienté situé dans un plan, cela définit le **vecteur surface** intérieure au contour $\vec{S} = S\vec{n}$.

S est la surface intérieure du contour

\vec{n} est le vecteur normal à la surface c'est-à-dire orthogonal et placé du côté défini par la convention donnée par la figure 6 liée à l'orientation du parcours. (Cette règle est dite : règle du tire-bouchon de Maxwell)

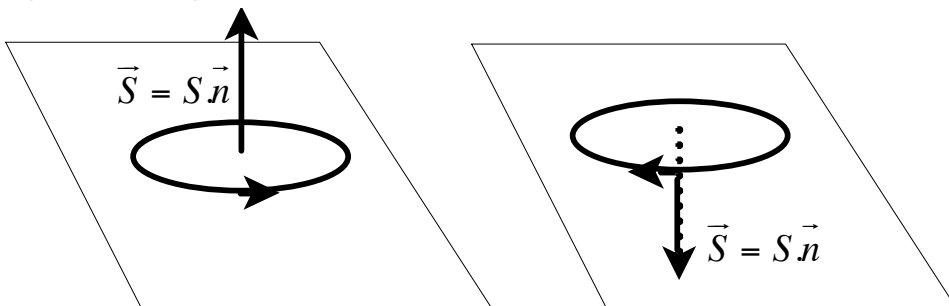


figure 6

Convention liant l'orientation du contour et le sens du vecteur surface

On définit alors le **flux** ϕ du vecteur \vec{B} à travers la surface \vec{S} par : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ (produit scalaire). Le flux du champ magnétique s'exprime en weber, (**Wilhelm WEBER** 1804-1891).

On montre que le flux du champ magnétique sur une surface fermée, comme une sphère par exemple, est nul. Le flux du champ magnétique est dit conservatif.

2.3 Le théorème d'Ampère

Soit un contour fermé orienté entourant un fil électrique parcouru par des courants dont la somme algébrique est i (cf. figure 7, l'orientation du contour et le sens de i respectent la règle du tire-bouchon de Maxwell). En tout point M du contour il existe le champ magnétique \vec{B} créé par le courant i .

$$\vec{B}(M) = \int_{\text{Fil}} d\vec{B} = \int_{\text{Fil}} \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}. \text{ On peut alors calculer la circulation}$$

$\oint_{\text{Contour}} \vec{B} \cdot d\vec{M}$ de \vec{B} le long du contour fermé et on aboutit à $\oint_{\text{Contour}} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 i$. Ceci

est le **théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétique sur un contour fermé entourant des courants électriques est proportionnelle à la somme des courants enlacés par le contour.**

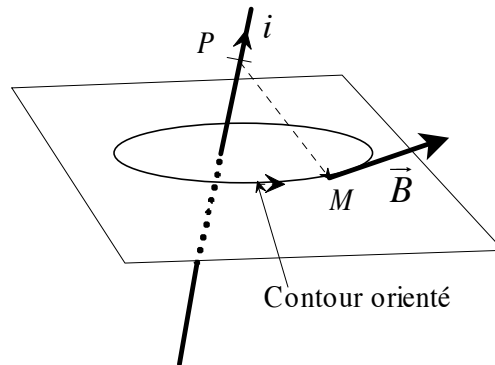


figure 7

Le théorème d'Ampère permet de déterminer le module du champ magnétique à partir du courant, mais ne permet pas de trouver le sens qui est donné par le postulat de Biot et Savart.

Pour déterminer le module du champ magnétique il faut que la géométrie étudiée possède des symétries et choisir un contour tel que :

- en chaque point du contour \vec{B} est tangent ou orthogonal au contour

- le module du champ doit avoir la même valeur en tout point du contour où il est tangentiel.

Les symétries des problèmes étudiés doivent permettre de trouver de tels contours sinon la méthode est sans utilité.

2.4 Champ au centre d'une spire ou d'une bobine plate

Soit une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par le courant i . On définit sur cette spire l'élément de courant $\vec{i}.d\vec{l} = i.R.d\theta\vec{e}_\theta$ comme indiqué sur la figure 8.

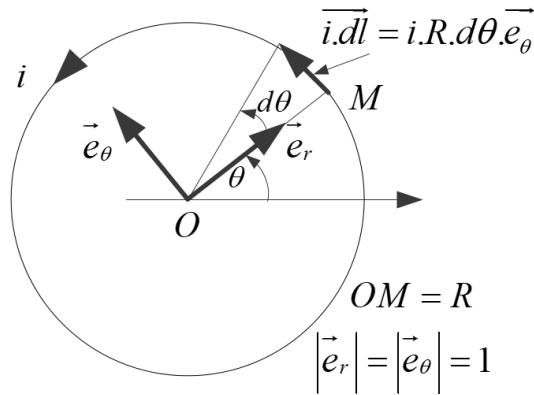


figure 8

Le champ magnétique au centre de la spire est alors

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} i.R.d\theta\vec{e}_\theta \wedge \frac{-\vec{e}_r}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi.R} \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{\mu_0 i.d\theta}{4\pi.R} \vec{e}_z$$

$\vec{e}_z = \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan de la spire.

Le module du champ créé par un élément de courant est ainsi :

$$dB = |\vec{dB}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi.R} d\theta \quad \text{d'où le module total du champ créé par toute la spire :}$$

$$B = \int_0^{2\pi} dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi.R} d\theta = \frac{\mu_0 i}{2.R}$$

Si on réalise une bobine plate en plaçant N spires identiques les unes à côté

des autres, il vient : $B = \mu_0 \frac{N.i}{2.R}$

On définit l'**excitation magnétique** $H = \frac{Ni}{2.R}$ telle que $B = \mu_0.H$

L'excitation magnétique présente l'intérêt d'être indépendante du milieu et de ne caractériser que la géométrie de la bobine. Le milieu (ici le vide) est caractérisé par la perméabilité magnétique (ici μ_0).

2.5 Influence de la matière sur le champ magnétique

On a vu (cf. §2.4) que le champ magnétique créé, dans le vide, au centre d'une bobine plate de N spires circulaires de rayon R et d'axe \vec{x} parcourue par le courant i est $\vec{B} = \mu_0 \frac{Ni}{2.R} \vec{e}_z$.

On définit le vecteur **excitation magnétique** $\vec{H} = \frac{Ni}{2.R} \vec{e}_z$ qui s'exprime en A/m ,

L'excitation magnétique est caractéristique de la géométrie bobine et indépendante du milieu (ici le vide).

Le milieu est caractérisé par la **perméabilité** (μ_0 pour le vide).

Dans le vide on a : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Il existe des matériaux, qui se magnétisent très facilement, c'est-à-dire qui conduisent à une **valeur élevée de B avec une valeur faible de H** , ce sont les **matériaux ferro-magnétiques et ferri-magnétiques**.

Si on réalise la bobine en bobinant les spires sur un tel matériau, on peut écrire en simplifiant (hypothèse de linéarité) : $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$

μ_r est la **perméabilité relative** du matériau.

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ est la **perméabilité magnétique absolue** du matériau.

Le théorème d'Ampère $\oint_{\text{Contour}} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \cdot I_{\text{int}}$ peut s'écrire $\oint_{\text{Contour}} \vec{H} \cdot d\vec{M} = I_{\text{int}}$ en

introduisant l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$. Dans un matériau de perméabilité μ_r ,

on a aussi $\oint_{\text{Contour}} \vec{H} \cdot d\vec{M} = I_{\text{int}}$ avec $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \cdot \mu_r}$

Pour les matériaux ferromagnétiques, la perméabilité relative est très grande, $\mu_r \gg 1$. Ainsi une même excitation magnétique H crée un champ B , μ_r fois plus élevé dans le matériau que dans le vide (ou dans l'air). **On peut alors négliger le champ magnétique présent dans l'air**. On sait que les lignes de champ sont des

courbes fermées qui entourent les conducteurs parcourus par un courant électrique. Si on place autour des conducteurs un circuit fermé en matériau magnétique, les lignes de champ sont concentrées dans le matériau, le champ est négligeable dans l'air. Dans la mesure du possible on réalise des circuits magnétiques fermés pour éviter l'existence du champ dans l'air. Pour un circuit électrique les charges se déplacent dans le circuit électrique fermé et ne « sortent » pas dans l'air. De manière analogue le champ magnétique, ne « sort » pas du circuit magnétique.

La présence au voisinage des circuits électriques d'un matériau magnétique détermine la géométrie des lignes de champ.

On compare la répartition du champ magnétique pour la même bobine mais en présence ou non de matériau magnétique à proximité.

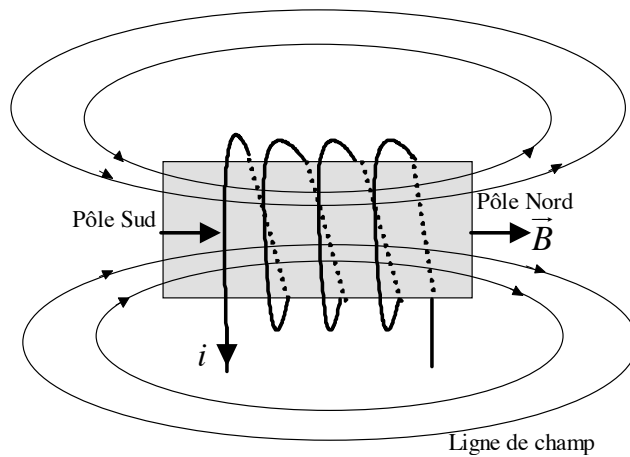


figure 9

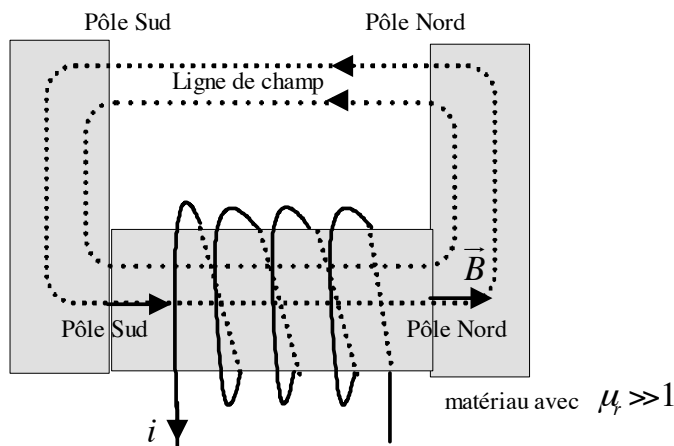


figure 10