Hamid Najib

Exercices et problèmes résolus de mécanique quantique

Avec rappels de cours

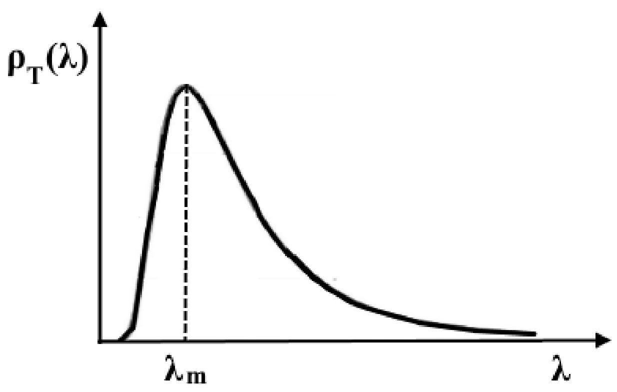
ellipses

Chapitre 1

QUANTUM - PHOTON - ONDE DE MATIERE

1.1 Spectre d'émission du corps noir

Un corps noir est un objet idéal qui absorbe totalement tout rayonnement électromagnétique (REM) qu'il reçoit ; son coefficient d'absorption A étant égal à un. C'est aussi le meilleur émetteur (soleil).
La figure suivante représente la densité spectrale d'énergie $\rho_T(\lambda)$ du corps noir en équilibre à la température absolue T, en fonction des longueurs d'onde du REM émis :



Plusieurs lois ont été proposées pour décrire le spectre continu du corps noir.

Loi de Stefan-Boltzmann

Elle donne l'énergie totale émise à la température T :

$$u(T) = \int_0^\infty \rho_T(\nu) d\nu = aT^4$$

ν : fréquence ; a : constante.
La densité d'énergie totale du corps noir, à une température T donnée, augmente proportionnellement à la quatrième puissance de la température.

Loi du déplacement de Wien

Elle détermine la longueur d'onde λ_m de la densité d'énergie maximale à la température T :

$$\lambda_m T = Cste = 2,898 \text{ x } 10^{-3} \ m.K$$

Loi de Rayleigh-Jeans

Rayleigh et Jeans ont proposé la loi suivante :

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2$$

k_B : constante de Boltzmann.
C'est une loi valable aux faibles fréquences. Pour des fréquences élevées, c'est la catastrophe ultraviolette.

Loi empirique de Wien

Wien a introduit une exponentielle décroissante dans l'expression de $\rho_T(\nu)$. La loi est donnée sous la forme :

$$\rho_T(\nu) = A\nu^3 e^{-B\nu/T}$$

A et B : constantes.
La loi de Wien est valable du côté des fréquences élevées.

Loi de Planck

En s'appuyant sur les principes classiques de la mécanique et de l'électrodynamique, Planck a obtenu la loi suivante :

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

qui exprime parfaitement la répartition spectrale du rayonnement émis par le corps noir à une température T donnée, à condition de considérer les hypothèses suivantes :
• Les échanges d'énergie entre les oscillateurs des parois du corps noir et le REM se font par paquets d'énergie appelés quanta.
• Chaque quantum transporte une énergie $E = h\nu$.
h : constante de Planck ; c : célérité de la lumière.

1.2 Effet photoélectrique - Photon

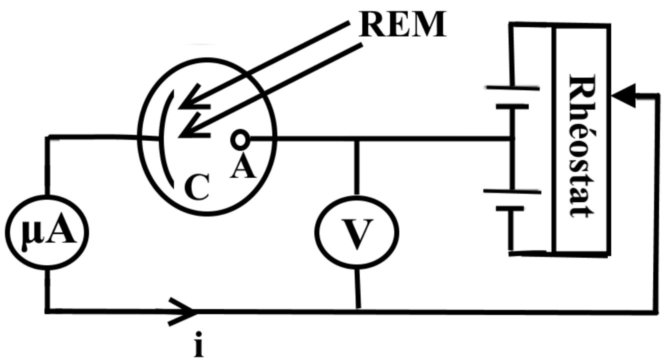
C'est l'éjection d'électrons par un métal (Zinc) soumis à l'action d'un REM (UV). Einstein a pu expliquer ce phénomène en postulant :
• Le REM est constitué de grains d'énergie appelés photons.
• Chaque photon transporte une énergie $E = h\nu$.
Pour que l'électron soit libéré, il faut que l'énergie $h\nu$ du photon absorbé soit égale au moins à l'énergie W_e nécessaire pour l'extraire. On conçoit ainsi qu'il existe pour le métal une fréquence de seuil ν_0 telle que :

$$h\nu_0 = W_e$$

Si l'énergie $h\nu$ est supérieure à W_e, l'énergie excédentaire est transmise à l'électron sous forme d'une énergie cinétique maximale E_{cmax}. La loi d'Einstein s'écrit :

$$h\nu = W_e + E_{cmax}$$

L'expérience consiste à envoyer une lumière de fréquence ν sur une cathode métallique C, afin de provoquer l'éjection d'électrons ; ces derniers étant collectés par une anode A. On applique une différence de potentiel $V = V_A - V_C$ réglable entre C et A.



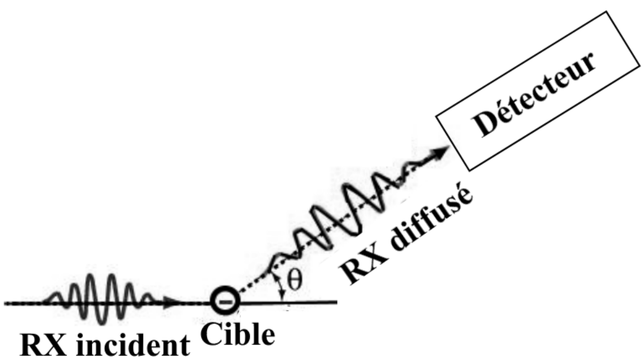
Le courant i créé s'annule lorsque V atteint la valeur -V_0 telle que :

$$E_{cmax} = eV_0 = h(\nu - \nu_0)$$

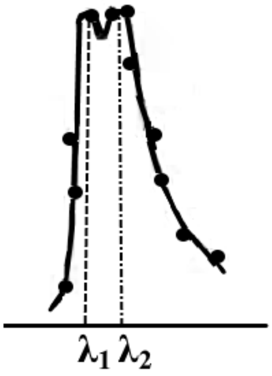
V_0 est appelé potentiel d'arrêt ou de freinage. C'est la valeur de la d.d.p pour laquelle il n'y a plus d'effet photoélectrique.

1.3 Effet Compton

C'est un phénomène de diffusion du rayonnement X, de longueur d'onde λ_1, lorsqu'il interagit avec la matière.



La radiation diffusée dans la direction θ est analysée par un spectromètre. On observe que pour un angle de diffusion θ non nul, le rayonnement X diffusé est composé de deux raies de longueurs d'onde différentes λ_1 et λ_2 telles que :



$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

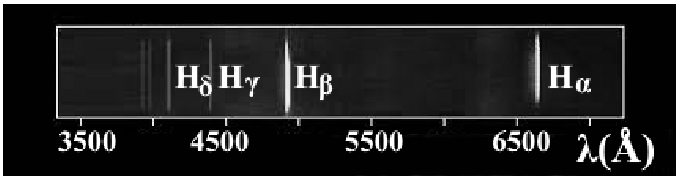
$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 0,02426 \text{ Å}$$

λ_C : longueur d'onde Compton. Compton a pu expliquer cet effet en admettant pour les rayons X un caractère corpusculaire (photon).

1.4 Spectre d'émission de l'hydrogène - Formule de Balmer-Rydberg

Expérience

Lorsqu'on excite un tube spectral rempli du gaz d'hydrogène par une décharge électrique, on observe l'émission d'une lumière rouge. L'analyse de ce REM par un moyen dispersif montre qu'il est constitué de raies colorées (spectre de raies) ; la raie rouge étant la plus intense.



Série de Balmer

Les quatre premières raies de l'hydrogène (H_α rouge ; H_β bleu ; H_γ indigo ; H_δ violet) étudiées sont situées dans le domaine visible du spectre. Balmer a proposé la formule suivante donnant leurs longueurs d'onde :

$$\lambda_n = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

n : entier naturel non nul supérieur à 2 ; $\lambda_0 = 3647,05$ Å.

Formule généralisée de Balmer-Rydberg

D'autres séries de raies ont été étudiées pour lesquelles la formule généralisée suivante a été proposée :

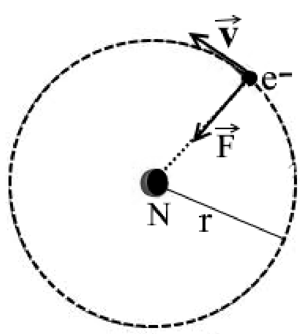
$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$R_H = 10973731{,}568\ m^{-1}$: constante de Rydberg ; $0 < m < n$.
Pour chaque valeur de m, on obtient une série de raies situées dans un domaine spectral donné.

- Série de Lyman (ultra-violet) : $m= 1$; $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Série de Balmer (visible) : $m= 2$; $n = 3, 4, 5, \ldots$
- Série de Paschen (infrarouge) : $m= 3$; $n = 4, 5, 6, \ldots$
- Série de Brackett (infrarouge) : $m= 4$; $n = 5, 6, 7, \ldots$
- Série de Pfund (infrarouge) : $m= 5$; $n = 6, 7, 8, \ldots$

Modèle semi-quantique de Bohr

Bohr a amélioré le modèle planétaire de Rutherford en postulant :



- Les trajectoires de l'électron sont telles que le moment cinétique est quantifié :

$$L = rmv = n\hbar \quad ; \quad n = 1, 2, 3, ...$$

• Sur une trajectoire baptisée orbite, l'état de l'électron est stationnaire.
• L'absorption ou l'émission d'un REM n'est possible que lorsque l'électron transite d'une orbite d'énergie E_n à une autre d'énergie E_m :

$$|E_n - E_m| = h\nu_{nm} \quad ; \quad \nu_{nm} : \text{ fréquence de Bohr}$$

Le modèle de Bohr permet de déterminer le rayon r_n et l'énergie E_n d'une orbite :

$$r_n = \frac{\hbar^2}{k_C m e^2} n^2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_n = -\frac{m k_C^2 e^4}{2\hbar^2} . \frac{1}{n^2}$$

$k_C = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$.
r_1 = 0,53 Å (rayon de Bohr) ; E_1 = -13,59 eV (énergie de l'état fondamental de l'hydrogène).

1.5 Onde associée de Louis de Broglie - Fonction d'onde

Louis de Broglie a suggéré que si le REM se comporte comme des corpuscules matériels, ceux-ci peuvent avoir un aspect ondulatoire. Il a ainsi associé à toute particule libre de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et d'énergie E une onde de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Par analogie avec un rayonnement électromagnétique, Louis de Broglie a associé à une particule libre une fonction d'onde d'une onde plane monochromatique :

$$\Psi_{LB}(\overrightarrow{r}, t) = a e^{-i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r})} = a e^{-i(Et - \overrightarrow{p}\overrightarrow{r})/\hbar}$$

avec :
$E = \hbar\omega = h\nu$; ω : pulsation ; ν : fréquence ;
$\overrightarrow{p} = \hbar\overrightarrow{k}$: vecteur impulsion ($\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ si l'impulsion se réduit à la quantité de mouvement) ;
$\overrightarrow{k}$: vecteur d'onde.

1.6 Interprétation de Max Born

Born a donné une interprétation probabiliste à la fonction d'onde associée Ψ, en faisant une analogie avec l'intensité d'une onde plane. La densité de probabilité de présence d'une particule dans un élément de volume $d\tau$ est donnée par :

$$dP/d\tau = |\Psi|^2$$

La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est égale à :

$$P_{dx} = |\Psi|^2 dx$$

Etendue à tout l'espace, la probabilité vaut un :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d\tau = 1$$

1.7 Particule classique

• Elle appartient au monde macroscopique.
• Elle est complètement caractérisée, à un instant t donné, par sa position $\overrightarrow{r}$ et son impulsion ou sa quantité de mouvement $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.
• Le principe fondamental de la dynamique de Newton permet de déterminer sa trajectoire.

1.8 Particule quantique

• Elle appartient au monde microscopique de la matière.
• Elle présente un double aspect (corpusculaire ou ondulatoire) dont chacun se manifeste selon les conditions expérimentales auxquelles elle est soumise. C'est l'exemple des électrons qui ont une masse et par conséquent leur nature est corpusculaire. Leur aspect ondulatoire se manifeste dans des expériences d'interférences.
• Elle est caractérisée, à un instant t donné, par sa fonction d'onde $\Psi(\overrightarrow{r}, t)$ telle que : $|\Psi(\overrightarrow{r}, t)|^2$ représente la densité de probabilité de sa présence dans un volume $d\tau$.
• Son évolution dans le temps est décrite par l'équation de Schrödinger.