

Hamid Najib

Exercices et problèmes résolus de mécanique quantique

Avec rappels de cours



Table des matières

1	QUANTUM - PHOTON - ONDE DE MATIERE	13
1.1	Spectre d'émission du corps noir	13
1.2	Effet photoélectrique - Photon	15
1.3	Effet Compton	16
1.4	Spectre d'émission de l'hydrogène - Formule de Balmer-Rydberg	17
1.5	Onde associée de Louis de Broglie - Fonction d'onde	19
1.6	Interprétation de Max Born	20
1.7	Particule classique	20
1.8	Particule quantique	20
1.9	EXERCICES RESOLUS 1	21
	Exercice 1.1 : Corps noir	21
	Exercice 1.2 : Effet photoélectrique	22
	Exercice 1.3 : Constante de Planck	24
	Exercice 1.4 : Effet Compton	25
	Exercice 1.5 : Effet Doppler	27
	Exercice 1.6 : Quantification de l'action - Modèle de Bohr	29
	Exercice 1.7 : Technique de diffusion	34
	Exercice 1.8 : Spectre d'émission de l'hydrogène	35
	Exercice 1.9 : Constante de Rydberg - Entraînement du noyau d'hydrogène - Tritium	36
	Exercice 1.10 : Potentiel de résonance - Potentiel d'ionisation .	40
	Exercice 1.11 : Onde associée de Louis de Broglie	41

2	EQUATION DE SCHRÖDINGER	43
2.1	Paquet d'onde	43
2.2	Vitesse de phase - Vitesse de groupe	44
2.3	Principe d'incertitude de Heisenberg	44
2.4	Principe de correspondance	45
2.5	Equation de Schrödinger	45
2.6	Equation des états stationnaires	46
2.7	EXERCICES RESOLUS 2	47
	Exercice 2.1 : Onde de Louis de Broglie	47
	Exercice 2.2 : Paquet d'onde Gaussien	48
	Exercice 2.3 : Mesure de l'impulsion d'une particule	51
	Exercice 2.4 : Incertitude de Heisenberg	53
	Exercice 2.5 : Ecart quadratique moyen de x et de p	54
	Exercice 2.6 : Equation de Klein-Gordon	55
	Exercice 2.7 : Equation de continuité	57
	Exercice 2.8 : Fonction d'onde - Equation de Schrödinger	58
	Exercice 2.9 : Système à deux particules	61
3	POTENTIEL CONSTANT PAR MORCEAUX	63
3.1	Equation des états stationnaires	63
3.2	Modélisation de potentiels réels	63
3.3	Analogie optique	64
3.4	Coefficients de réflexion et de transmission	65
3.5	Conditions de continuité	66
3.6	Cas d'un potentiel $V(x)$ pair	66
3.7	Etat lié - Etat non lié	67
3.8	EXERCICES RESOLUS 3	68
	Exercice 3.1 : Marche de potentiel	68
	Exercice 3.2 : Barrière de potentiel	70
	Exercice 3.3 : Puits de potentiel infiniment profond	74
	Exercice 3.4 : Puits de potentiel symétrique	77
	Exercice 3.5 : Puits de potentiel infini	79
	Exercice 3.6 : Double puits de potentiel asymétrique	82
	Exercice 3.7 : Particule confinée dans une boîte cubique	86

4 OUTILS MATHÉMATIQUES - POSTULATS	91
4.1 Espace des fonctions d'onde \mathcal{F}	91
4.2 Notation de Dirac	91
4.3 Base orthonormée complète et discrète	92
4.4 Base orthonormée complète et continue	93
4.5 Opérateur - Observable - ECOC	94
4.6 Equation aux valeurs propres	96
4.7 Postulats de la mécanique quantique	96
4.8 EXERCICES RESOLUS 4	100
Exercice 4.1 : Base orthonormée continue ou discrète	100
Exercice 4.2 : Représentations de position et d'impulsion	102
Exercice 4.3 : Vecteur d'état	104
Exercice 4.4 : Produit scalaire - Norme	105
Exercice 4.5 : Opérateur linéaire	106
Exercice 4.6 : Opérateur adjoint	107
Exercice 4.7 : Opérateur hermitique	110
Exercice 4.8 : Opérateur de projection	112
Exercice 4.9 : Opérateur densité	114
Exercice 4.10 : Opérateur unitaire	118
Exercice 4.11 : Opérateur de translation	121
Exercice 4.12 : Opérateur parité	123
Exercice 4.13 : Opérateur d'évolution	125
Exercice 4.14 : Opérateur de position - Opérateur d'impulsion	126
Exercice 4.15 : Trace d'un opérateur	130
Exercice 4.16 : Valeurs propres - vecteurs propres - Observable	131
Exercice 4.17 : ECOC	132
Exercice 4.18 : Représentation matricielle	134
Exercice 4.19 : Représentations de Schrödinger et de Heisenberg	139
Exercice 4.20 : Mesure d'une observable	141
Exercice 4.21 : Système à deux états - Molécule NH_3	144
Exercice 4.22 : Molécule triatomique linéaire	147

5	OSCILLATEUR HARMONIQUE	151
5.1	Introduction	151
5.2	Etude classique	151
5.3	Etude quantique	152
5.4	Fonctions propres de l'Hamiltonien	155
5.5	EXERCICES RESOLUS 5	157
	Exercice 5.1 : Valeur propre de l'opérateur nombre de quanta .	157
	Exercice 5.2 : Fonction d'onde d'un l'oscillateur harmonique . .	158
	Exercice 5.3 : Evolution dans le temps d'un oscillateur	160
	Exercice 5.4 : Eléments matriciels des opérateurs d'annihilation et de création	162
	Exercice 5.5 : Etat cohérent d'un oscillateur	165
	Exercice 5.6 : Position moyenne d'un oscillateur harmonique . .	168
	Exercice 5.7 : Comparaison des valeurs moyennes des énergies d'oscillateurs quantique et classique	170
	Exercice 5.8 : Oscillateur plongé dans un champ électrique . . .	173
	Exercice 5.9 : Oscillateur harmonique plan	174
	Exercice 5.10 : Oscillateurs couplés	178
	Exercice 5.11 : Oscillateur dans un potentiel à trois dimensions	183
	Exercice 5.12 : Cristal de gaz - Potentiel de Lennard-Jones . . .	187
	Exercice 5.13 : Oscillateur harmonique CN	188
	Exercice 5.14 : Vibration de la molécule HCl	189
6	MOMENT CINETIQUE	193
6.1	Moment cinétique classique	193
6.2	Moment cinétique orbital	193
6.3	Moment cinétique de spin	196
6.4	Moment cinétique total	196
6.5	Moment magnétique	196
6.6	Particule plongée dans un champ magnétique	197
6.7	Spineur	197
6.8	Addition de deux moments cinétiques	198
6.9	Moment cinétique orbital dans la base $\{ \vec{r}\rangle\}$	199
6.10	EXERCICES RESOLUS 6	201

Exercice 6.1 : Commutateurs du moment cinétique	201
Exercice 6.2 : Spectre de J^2 et J_z	203
Exercice 6.3 : Fonctions propres des opérateurs L^2 et L_z	206
Exercice 6.4 : Représentation vectorielle de \vec{L}	209
Exercice 6.5 : Mesure de moment cinétique	211
Exercice 6.6 : Base standard dans la représentation $\{ \vec{r}\rangle\}$ - Mesure de L^2 et L_z	214
Exercice 6.7 : Opérateurs quanta circulaires droits et gauches	218
Exercice 6.8 : Matrices du moment cinétique orbital $\ell = 1$	220
Exercice 6.9 : Précession de Larmor	222
Exercice 6.10 : Expérience de Stern et Gerlach	225
Exercice 6.11 : Moment cinétique de spin	228
Exercice 6.12 : Matrices de Pauli	234
Exercice 6.13 : Opérateur d'évolution de spin	237
Exercice 6.14 : Evolution de la moyenne du moment de spin	241
Exercice 6.15 : Harmoniques sphériques - Etat complet d'un atome - Spineur	243
Exercice 6.16 : Moment magnétique - Magnéton de Bohr	245
Exercice 6.17 : Facteur de Landé	248
Exercice 6.18 : Système plongé dans un gradient de champ électrique	250
Exercice 6.19 : Interaction entre le moment quadripolaire d'un noyau et un champ électrique	252
Exercice 6.20 : Résonance magnétique - Oscillations de Rabi	255
Exercice 6.21 : Notation spectroscopique d'états atomiques	263
Exercice 6.22 : Couplage spin-orbite - Structure fine du carbone	266
Exercice 6.23 : Dia-paramagnétisme atomique	268
Exercice 6.24 : Raie D du Sodium - Effet Zeeman	270
Exercice 6.25 : Etude de la Raie R du Sodium	273
Exercice 6.26 : Coefficients de Clebsh-Gordan	276
Exercice 6.27 : Rotateur rigide	278
Exercice 6.28 : Rotation pure de la molécule NF_3	283
Exercice 6.29 : Oscillateur harmonique de spin 1/2	289

7	POTENTIEL CENTRAL - ATOME D'HYDROGENE	293
7.1	Equation aux valeurs propres	293
7.2	Fonctions propres - Equation radiale	294
7.3	Application à l'atome d'hydrogène	295
7.4	Orbitale atomique - Densité de probabilité	297
7.5	EXERCICES RESOLUS 7	299
	Exercice 7.1 : Equation radiale - Potentiel effectif	299
	Exercice 7.2 : Particule dans un potentiel en r^2	301
	Exercice 7.3 : Energies de l'atome d'hydrogène	306
	Exercice 7.4 : Molécule diatomique	309
	Exercice 7.5 : Action d'un champ magnétique sur l'état 2p de l'hydrogène	317
	Exercice 7.6 : Interaction magnétique entre les électrons de deux atomes d'hydrogène	320
	Exercice 7.7 : Orbitale 1s de l'atome d'hydrogène	324
	Exercice 7.8 : Orbitale 2s de l'atome d'hydrogène	326
8	THEORIE DES PERTURBATIONS STATIONNAIRES	329
8.1	Principe - Méthode de Rayleigh-Schrödinger	329
8.2	Calcul des corrections - Perturbation d'un niveau non dégénéré	330
8.3	Perturbation d'un niveau dégénéré	330
8.4	EXERCICES RESOLUS 8	331
	Exercice 8.1 : Perturbation d'un niveau non dégénéré	331
	Exercice 8.2 : Perturbation d'un niveau dégénéré	334
	Exercice 8.3 : Exemple de calcul de corrections à l'énergie . . .	336
	Exercice 8.4 : Perturbation d'une particule par la fonction de Dirac δ	339
	Exercice 8.5 : Système plongé dans un champ magnétique . . .	340
	Exercice 8.6 : Perturbation d'un oscillateur harmonique par un potentiel linéaire	344
	Exercice 8.7 : Perturbation d'un oscillateur harmonique par un potentiel quadratique	346
	Exercice 8.8 : Oscillateur anharmonique	349

Exercice 8.9 : Perturbation d'un oscillateur harmonique par un potentiel en X^4	352
Exercice 8.10 : Perturbation d'un oscillateur harmonique à deux dimensions	355
Exercice 8.11 : Noyau perturbé par un champ électrique et un champ magnétique	357
Exercice 8.12 : Perturbation par un potentiel en $1/r^2$	361
Exercice 8.13 : Effet Zeeman - Structure hyperfine	362
Exercice 8.14 : Effet Paschen-Back	368
Exercice 8.15 : Effet Stark - Atome d'hydrogène	377
Exercice 8.16 : Effets relativistes - Atome d'hydrogène	380
Exercice 8.17 : Forces de Van der Waals	387
Exercice 8.18 : Spectre de vibration-rotation de la bande $2\nu_3$ de $\text{CH}_3^{79}\text{Br}$	390
9 ANALYSE DE FOURIER	393
9.1 Séries de Fourier	393
9.2 Transformation de Fourier	393
9.3 Transformation de Fourier en mécanique quantique	394
9.4 Produit de convolution	395
9.5 Distribution de Dirac $\delta(x)$	395
9.6 EXERCICES RESOLUS 9	398
Exercice 9.1 : Séries de Fourier - Egalité de Bessel-Parseval . .	398
Exercice 9.2 : Formule de Parseval-Plancherel	402
Exercice 9.3 : TF de la fonction porte	403
Exercice 9.4 : TF de la fonction toile de tente	404
Exercice 9.5 : TF d'une Gaussienne	405
Constantes physiques	407
Bibliographie	409
Index	411