

Bouchaïb Radi  
Abdelkhalak El Hami

MPSI  
MP2I

# Maths

Cours, exercices et problèmes corrigés

**NOUVEAUX  
PROGRAMMES** !



ellipses

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Raisonnement et vocabulaire ensemblistes</b>	<b>1</b>
1.1	Rudiments de logique . . . . .	1
1.2	Ensembles . . . . .	3
1.3	Applications et relations . . . . .	4
1.4	Exercices résolus . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie</b>	<b>15</b>
2.1	Sommes et produits . . . . .	15
2.2	Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot . . . . .	17
2.3	Inégalités . . . . .	18
2.4	Trigonométrie . . . . .	20
2.5	Exercices résolus . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>33</b>
3.1	Nombres complexes . . . . .	33
3.2	Conjugaison et module . . . . .	34
3.3	Nombres complexes de module 1 et trigonométrie . . . . .	34
3.4	Forme trigonométrique . . . . .	36
3.5	Équations algébriques . . . . .	37
3.6	Racines $n$ -ièmes . . . . .	37
3.7	Exponentielle complexe . . . . .	38
3.8	Interprétation géométrique des nombres complexes . . . . .	38
3.9	Exercices résolus . . . . .	39
3.10	Problèmes résolus . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral</b>	<b>55</b>
4.1	Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes . . . . .	55
4.1.1	Généralités sur les fonctions . . . . .	55
4.1.2	Dérivation . . . . .	57
4.1.3	Fonctions usuelles . . . . .	60
4.1.4	Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle . . . . .	64
4.2	Primitives et équations différentielles linéaires . . . . .	65
4.2.1	Calcul de primitives . . . . .	65
4.2.2	Équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	68

4.2.3	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . . .	70
4.3	Exercices résolus . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Nombres réels et suites numériques</b>	<b>119</b>
5.1	Ensembles de nombres usuels . . . . .	119
5.2	Propriété de la borne supérieure . . . . .	120
5.3	Généralités sur les suites réelles . . . . .	120
5.4	Limite d'une suite réelle . . . . .	121
5.5	Suites monotones . . . . .	122
5.6	Suites extraites . . . . .	123
5.7	Traduction séquentielle de certaines propriétés . . . . .	123
5.8	Suites complexes . . . . .	123
5.9	Suites particulières . . . . .	124
5.10	Exercices résolus . . . . .	126
5.11	Problèmes résolus . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité, dérivabilité, convexité</b>	<b>145</b>
6.1	Limites et continuité . . . . .	145
6.1.1	Limite d'une fonction en un point . . . . .	145
6.1.2	Continuité en un point . . . . .	148
6.1.3	Continuité sur un intervalle . . . . .	149
6.1.4	Fonctions complexes . . . . .	150
6.2	Dérivabilité . . . . .	151
6.2.1	Nombre dérivé, fonction dérivée . . . . .	151
6.2.2	Extremum local et point critique . . . . .	153
6.2.3	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .	153
6.2.4	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	155
6.2.5	Fonctions complexes . . . . .	156
6.3	Convexité . . . . .	157
6.3.1	Généralités . . . . .	157
6.3.2	Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables . . . . .	157
6.4	Exercices résolus . . . . .	158
6.5	Problèmes résolus . . . . .	187
<b>7</b>	<b>Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs</b>	<b>201</b>
7.1	Divisibilité et division euclidienne . . . . .	201
7.2	PGCD et algorithme d'Euclide . . . . .	201
7.3	Entiers premiers entre eux . . . . .	202
7.4	Nombres premiers . . . . .	203
7.5	Congruences . . . . .	204
7.6	Exercices résolus . . . . .	204

<b>8 Structures algébriques usuelles</b>	<b>219</b>
8.1 Loi de composition interne . . . . .	219
8.2 Structure de groupe . . . . .	220
8.3 Structures d'anneau et de corps . . . . .	221
8.4 Exercices résolus . . . . .	222
8.5 Problèmes résolus . . . . .	229
<b>9 Calcul matriciel et systèmes linéaires</b>	<b>233</b>
9.1 Opérations sur les matrices . . . . .	233
9.2 Opérations élémentaires . . . . .	234
9.3 Systèmes linéaires . . . . .	235
9.4 Anneau des matrices carrées . . . . .	238
9.5 Exercices résolus . . . . .	240
9.6 Problèmes résolus . . . . .	246
<b>10 Polynômes et fractions rationnelles</b>	<b>251</b>
10.1 Anneau des polynômes à une indéterminée . . . . .	251
10.2 Divisibilité et division euclidienne . . . . .	252
10.3 Fonctions polynomiales et racines . . . . .	253
10.4 Dérivation . . . . .	254
10.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	255
10.6 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	255
10.7 Formule d'interpolation de Lagrange . . . . .	256
10.8 Fractions rationnelles . . . . .	256
10.9 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ . . . . .	257
10.10 Exercices résolus . . . . .	257
10.11 Problèmes résolus . . . . .	265
<b>11 Analyse asymptotique</b>	<b>269</b>
11.1 Relations de comparaison: cas des fonctions . . . . .	269
11.2 Développements limités . . . . .	270
11.3 Relations de comparaison: cas des suites . . . . .	274
11.4 Problèmes d'analyse asymptotique . . . . .	274
11.5 Exercices résolus . . . . .	275
11.6 Problèmes résolus . . . . .	295
<b>12 Espaces vectoriels et applications linéaires</b>	<b>303</b>
12.1 Espaces vectoriels . . . . .	303
12.1.1 Espaces vectoriels . . . . .	303
12.1.2 Sous-espaces vectoriels . . . . .	304
12.1.3 Familles de vecteurs . . . . .	305
12.1.4 Somme de deux sous-espaces . . . . .	305
12.2 Espaces de dimension finie . . . . .	306
12.2.1 Existence de bases . . . . .	306
12.2.2 Dimension d'un espace de dimension finie . . . . .	306
12.2.3 Sous-espaces et dimension . . . . .	307
12.3 Applications Linéaires . . . . .	308

12.3.1	Généralités . . . . .	308
12.3.2	Endomorphismes . . . . .	309
12.3.3	Détermination d'une application linéaire . . . . .	310
12.3.4	Théorème du rang . . . . .	311
12.3.5	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	311
12.4	Sous-espaces affines d'un espace vectoriel . . . . .	311
12.5	Exercices résolus . . . . .	312
12.6	Problèmes résolus . . . . .	323
<b>13</b>	<b>Matrices</b>	<b>329</b>
13.1	Matrices et applications linéaires . . . . .	329
13.1.1	Matrice d'une application linéaire dans des bases . . . . .	329
13.1.2	Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . . . .	330
13.1.3	Systèmes linéaires . . . . .	330
13.2	Changements de bases, équivalence et similitude . . . . .	331
13.2.1	Changements de bases . . . . .	331
13.2.2	Matrices équivalentes et rang . . . . .	331
13.2.3	Matrices semblables et trace . . . . .	332
13.3	Exercices résolus . . . . .	333
13.4	Problèmes résolus . . . . .	339
<b>14</b>	<b>Groupe symétrique et déterminants</b>	<b>345</b>
14.1	Groupe symétrique . . . . .	345
14.1.1	Généralités . . . . .	345
14.1.2	Signature d'une permutation . . . . .	345
14.2	Déterminants . . . . .	346
14.2.1	Formes $n$ -linéaires alternées . . . . .	346
14.2.2	Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base . . . . .	347
14.2.3	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	347
14.2.4	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	347
14.2.5	Calcul des déterminants . . . . .	348
14.2.6	Comatrice . . . . .	349
14.3	Exercices résolus . . . . .	349
<b>15</b>	<b>Intégration</b>	<b>357</b>
15.1	Continuité uniforme . . . . .	357
15.2	Fonctions continues par morceaux . . . . .	357
15.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . .	358
15.4	Sommes de Riemann . . . . .	359
15.5	Lien entre intégrale et primitive . . . . .	360
15.6	Formules de Taylor globales . . . . .	361
15.7	Exercices résolus . . . . .	362

<b>16</b>	<b>Dénombrement</b>	<b>391</b>
16.1	Cardinal d'un ensemble fini . . . . .	391
16.2	Listes et combinaisons . . . . .	392
16.3	Exercices résolus . . . . .	392
<b>17</b>	<b>Probabilités</b>	<b>403</b>
17.1	Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois . . . . .	403
17.1.1	Univers, événements, variables aléatoires . . . . .	403
17.1.2	Espaces probabilisés finis . . . . .	403
17.1.3	Probabilités conditionnelles . . . . .	404
17.1.4	Loi d'une variable aléatoire . . . . .	405
17.1.5	Événements indépendants . . . . .	405
17.1.6	Variables aléatoires indépendantes . . . . .	406
17.2	Espérance et variance . . . . .	406
17.2.1	Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe . . . . .	406
17.2.2	Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance . . . . .	407
17.2.3	Inégalités probabilistes . . . . .	408
17.3	Exercices résolus . . . . .	408
17.4	Problèmes résolus . . . . .	427
<b>18</b>	<b>Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>435</b>
18.1	Produit scalaire . . . . .	435
18.2	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	435
18.3	Orthogonalité . . . . .	436
18.4	Bases orthonormées . . . . .	437
18.5	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . . .	437
18.6	Exercices résolus . . . . .	438
<b>19</b>	<b>Procédés sommatoires discrets</b>	<b>449</b>
19.1	Convergence et divergence . . . . .	449
19.2	Séries à termes positifs ou nuls . . . . .	450
19.3	Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes . . . . .	451
19.4	Théorème des séries alternées . . . . .	451
19.5	Familles sommables de nombres réels positifs . . . . .	451
19.6	Familles sommables de nombres complexes . . . . .	452
19.7	Exercices résolus . . . . .	453
19.8	Problèmes résolus . . . . .	461
<b>20</b>	<b>Fonctions de deux variables réelles</b>	<b>467</b>
20.1	Ouverts de $\mathbb{R}^2$ , fonctions continues . . . . .	467
20.2	Dérivées partielles . . . . .	468
20.3	Dérivées partielles et composées . . . . .	470
20.4	Extremums . . . . .	471
20.5	Exercices résolus . . . . .	473