T^le^

Alice Ordines

THÈMES D'APPROFONDISSEMENT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

OBJECTIF SUP

ellipses

THÈME 1
Suites homographiques

1. Pré-requis

La version 1 et le protocole d'étude des suites associées ne nécessitent que les notions sur les suites algébriques et géométriques de Première.

— Le raisonnement par récurrence n'est nécessaire que pour la version 2.

Le but de ce thème est de travailler sur les suites homographiques. Ces suites ont l'avantage de pouvoir s'étudier en totalité grâce aux suites géométriques et aux suites arithmétiques. En cela, elles représentent un bon contexte d'approfondissement de début d'année.
Ces suites sont une généralisation des suites arithmético-géométriques et sont donc plus riches, notamment car la suite auxiliaire est, selon les cas, arithmétique ou géométrique.
La démonstration du protocole d'étude n'est pas un but en soit mais il est formateur pour l'esprit d'apprendre à comprendre puis à manipuler ce genre de démonstration. Par ailleurs, l'appréhender par contre vous fait prendre de l'avance.

Une fois la récurrence travaillée, on peut montrer autrement la formule explicite... Encore faut-il l'avoir. La difficulté réside alors essentiellement dans le travail sur les puissances. Les puissances, comme les sommes, représentent un cadre idéal de travail technique sur la récurrence.

2. Deux exercices classiques sous deux versions

Voici deux extraits d'exercices du Bac sur les suites (Liban et Polynésie 2013). Dans un cas, nous étudions la suite proposée grâce à une suite auxiliaire

arithmétique, dans l'autre, grâce à une suite auxiliaire géométrique.
Dans les deux cas, les notions de Première nous permettent de trouver l'expression explicite des termes de la suite.

À la suite de chaque exercice, une deuxième version est proposée. On vous demande alors de montrer par récurrence la véracité de l'expression explicite proposée. Selon l'avancée dans l'année, vous pouvez sauter cette version.

Exercice 1 :

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}, \quad U_0 = 1.$$

1. Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On admet que pour tout entier n, $U_n \neq 3$ et on pose :
$$V_n = \frac{1}{U_n - 3}.$$
Montrer que (V_n) est arithmétique de raison $\frac{-1}{3}$.
3. En déduire l'expression explicite de V_n puis de U_n.
4. Conjecturer la limite éventuelle de (U_n).

2[e] version :

Montrer par récurrence que pour tour entier n :

$$U_n = \frac{3 + 6n}{3 + 2n}.$$

Exercice 2 :

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n}{1 + 2U_n}, \quad U_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On admet que pour tout entier n, $U_n \neq 1$ et on pose :
$$V_n = \frac{U_n}{1 - U_n}.$$
Montrer que (V_n) est géométrique de raison 3.
3. En déduire l'expression explicite de V_n puis de U_n.
4. Conjecturer la limite éventuelle de (U_n).

2[e] version :

Montrer par récurrence que pour tour entier n :

$$U_n = \frac{3^n}{3^n + 1}.$$

3. Les suites associées : les suites homographiques

Définition : Une suite (U_n) est dite homographique si elle vérifie la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d} \text{ avec } c \neq 0.$$

La restriction sur c est celle qui exclut le cas des suites arithmético-géométriques, *cf. Thèmes d'approfondissement de Première.*

<u>Définition :</u> On appelle équation associée à la suite homographique précédente l'équation :

$$x = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$$

<u>Propriété :</u> Soit (U_n) une suite homographique d'équation associée $x = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$

- **Si** $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ **admet une unique solution** α**, alors la suite auxiliaire définie par** $V_n = \frac{1}{U_n - \alpha}$ **est arithmétique de raison** $\frac{2c}{a+d}$ **.**
- **Si** $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ **admet deux solutions** α **et** β**, alors la suite auxiliaire définie par** $V_n = \frac{U_n - \beta}{U_n - \alpha}$ **est géométrique de raison** $\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$**.**

Pour trouver la raison, le plus simple est de la déterminer grâce aux premiers termes à chaque fois.

<u>Remarque :</u> Dans chaque cas, la suite (V_n) est bien définie car si pour un entier n, $U_n = \alpha$, alors la suite est constante à partir de ce rang et l'étude n'est pas nécessaire.
De plus, α étant l'unique solution de $\alpha = \frac{ax+b}{cx+d}$, si pour un n, $U_n = \alpha$, alors tous les termes précédents valent α, le premier terme également. La suite est donc constante en toute généralité.
Nous supposerons donc dans ce qui suit que (U_n) n'est pas constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq \alpha.$$

La démonstration générale est intéressante à travailler car elle donne des idées et vous confronte à des démonstrations difficiles. Mais justement, elle est difficile. Vous n'avez aucune obligation de tout comprendre. Chaque étape que vous comprenez vous fait progresser.

Pour l'étude autonome des suites homographiques, il est important de retenir l'expression de la suite associée et sa nature.

Refaire la démonstration dans chaque cas est plus simple que de retenir la démonstration.

La démonstration du 2e cas étant la plus simple, c'est celle que vous trouverez en premier ; pour autant, vous rencontrerez davantage le 1r cas en Terminale.

Démonstration :

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \Leftrightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

2e cas : l'équation admet deux solutions α et β

On nomme arbitrairement les solutions de l'équation α et β.

Comme α et β sont solutions de l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, on a

$$\alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} \text{ et } \beta = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}.$$

Ces deux égalités seront utilisées en début de démonstration.

On définit la suite (V_n) de terme général $V_n = \dfrac{U_n-\beta}{U_n-\alpha}$ et on montre que (V_n) est géométrique. Pour un entier quelconque n,

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-\beta}{U_{n+1}-\alpha} = \frac{\dfrac{aU_n+b}{cU_n+d} - \dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}}{\dfrac{aU_n+b}{cU_n+d} - \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}.$$

Pour plus de confort, traitons le numérateur et le dénominateur séparément :

$$\frac{aU_n+b}{cU_n+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d} = \frac{ac\beta U_n + adU_n + bc\beta + bd - ac\beta U_n - a\beta d - bcU_n - bd}{(cU_n+d)(c\beta+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)U_n - \beta(ad-bc)}{(cU_n+d)(c\beta+d)} = \frac{(ad-bc)(U_n-\beta)}{(cU_n+d)(c\beta+d)}.$$

Dans le dénominateur, l'expression est la même avec α à la place de β donc en remplaçant β par α, on obtient :

$$\frac{aU_n+b}{cU_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \frac{(ad-bc)(U_n-\alpha)}{(cU_n+d)(c\alpha+d)}.$$

$$V_{n+1} = \frac{(ad-bc)(U_n-\beta)}{(cU_n+d)(c\beta+d)} \times \frac{(cU_n+d)(c\alpha+d)}{(ad-bc)(U_n-\alpha)} = \frac{U_n-\beta}{U_n-\alpha} \times \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$$

$$V_{n+1} = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d} \times V_n.$$

$$\boxed{(V_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}.}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 q^n = \left(\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n \times \dfrac{U_0-\beta}{U_0-\alpha}$.

De plus $V_n = \dfrac{U_n-\beta}{U_n-\alpha} \neq 1$ car $\alpha \neq \beta$, on a donc $U_n = \dfrac{\alpha V_n - \beta}{V_n - 1}$.

<u>1^er^ cas : l'équation n'admet qu'une seule solution α</u>

Commençons par quelques remarques qui nous serons utiles dans la suite :

(1) α est l'unique solution de l'équation donc $\boxed{\alpha = \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}$.

(2) $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$ comme abscisse du sommet de la parabole $y = cx^2 + (d-a)x - b$.

On a donc $c\alpha + d = \dfrac{c(a-d)}{2c} + d = \dfrac{a-d}{2} + d = \dfrac{a+d}{2}$ donc $\boxed{c\alpha + d = \dfrac{a+d}{2}}$.

(3) $\dfrac{a+d}{2} = c\alpha + d$ donc $\boxed{d = \dfrac{a+d}{2} - c\alpha}$.

(4) $\Delta = 0 \Rightarrow (d-a)^2 + 4bc = 0 \Rightarrow (d-a)^2 = -4bc$.

$(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 - 2ad + 4ad + d^2 = (a-d)^2 + 4ad$ donc $\boxed{ad - bc = \dfrac{(a+d)^2}{4}}$.

On définit la suite (V_n) de terme général $V_n = \dfrac{1}{U_n - \alpha}$ et on montre que (V_n) est arithmétique. Pour un entier quelconque n,

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{\dfrac{aU_n + b}{cU_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} \qquad \text{par (1)}$$

$$= \frac{(c\alpha + d)(cU_n + d)}{(aU_n + b)(c\alpha + d) - (a\alpha + b)(cU_n + d)}.$$

On développe et réduit le dénominateur indépendamment pour plus de lisibilité :

$D = (aU_n + b)(c\alpha + d) - (a\alpha + b)(cU_n + d)$
$D = ac\alpha U_n + adU_n + bc\alpha + bd - ac\alpha U_n - ad\alpha - bd - bcU_n = U_n(ad - bc) - \alpha(ad - bc)$
$D = (ad - bc)(U_n - \alpha)$ donc

$V_{n+1} = \dfrac{(c\alpha + d)(cU_n + d)}{(ad - bc)(U_n - \alpha)}$ et par (2) puis par (3) et (4) :

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{a+d}{2}(cU_n + d)}{(ad - bc)(U_n - \alpha)} = \frac{\dfrac{a+d}{2}\left(cU_n + \dfrac{a+d}{2} - c\alpha\right)}{(ad - bc)(U_n - \alpha)}$$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{a+d}{2}\left(c(U_n - \alpha) + \dfrac{a+d}{2}\right)}{(ad - bc)(U_n - \alpha)} = \frac{\dfrac{a+d}{2}\left(c(U_n - \alpha) + \dfrac{a+d}{2}\right)}{\dfrac{(a+d)^2}{4}(U_n - \alpha)}$$

$$V_{n+1} = \frac{2(a+d)}{(a+d)^2}\left(\frac{c(U_n - \alpha)}{U_n - \alpha} + \frac{a+d}{2(U_n - \alpha)}\right) \qquad \text{, en développant}$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{a+d}\left(c + \frac{a+d}{2(U_n - \alpha)}\right) = \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{U_n - \alpha} = \frac{2c}{a+d} + V_n.$$

$$\boxed{(V_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{2c}{a+d}.}$$

On aura donc dans le cas général :
$V_n = V_0 + nr = \dfrac{1}{U_0 - \alpha} + \dfrac{2cn}{a+d}$ et comme $V_n = \dfrac{1}{U_n - \alpha} \neq 0$, on a $U_n = \dfrac{1}{V_n} + \alpha$.

Il existe une démonstration beaucoup, beaucoup plus élégante et plus courte qui utilise la classification des homographies et le nombre de points fixes dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Cette démonstration mérite d'être connue par les candidats aux concours de l'enseignement.

4. Exercices

Dans les exercices de Terminale, la suite auxiliaire est toujours donnée et n'est pas à vérifier. Ici, je vous propose de la vérifier à chaque fois en approfondissement. Si vous préférez sauter cette question, vous aurez 4 exercices standards de Terminale. Ne cherchez pas alors les deux derniers.

<u>Exercice 3 :</u> On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 16}{U_n - 3}, \quad U_0 = 5.$$

1. On suppose que pour tout n, $U_n \neq 4$.
   Vérifier que la suite auxiliaire à poser est bien $V_n = \dfrac{1}{U_n - 4}$.
2. Montrer que (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.
3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n.
4. Conjecturer sa limite.

<u>Exercice 4 :</u> On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}, \quad U_0 = 7.$$

1. On suppose que pour tout n, $U_n \neq -3$.
   Vérifier que la suite auxiliaire à poser est bien $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 3}$.
2. Montrer que (V_n) est géométrique et déterminer sa raison.
3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n.
4. Dans certains cas, on trouve $V_n = 1 - \dfrac{5}{U_n + 3}$ pour définir la suite auxiliaire.
   Expliquer pourquoi cette suite est, elle aussi, valable.

<u>Exercice 5 :</u> On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n - 9}{U_n - 5}, \quad U_1 = 4.$$

1. On suppose que pour tout n, $U_n \neq 3$.
   Vérifier que la suite auxiliaire à poser est bien $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$.
2. Montrer que (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n.

Exercice 6 : On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n - 6}{U_n - 4}, \quad U_2 = 0.$$

1. On suppose que pour tout n, $U_n \neq 3$.
   Vérifier que la suite auxiliaire à poser est bien $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 3}$.
2. Montrer que (V_n) est géométrique et déterminer sa raison.
3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n.

Exercice 7 : On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n - 9}{U_n - 4}, \quad U_0 = 5.$$

Déterminer la suite auxiliaire adaptée afin de déterminer l'expression explicite de (U_n) ainsi que sa nature.

Exercice 8 : On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 4}{U_n - 2}, \quad U_0 = 0.$$

Déterminer la suite auxiliaire adaptée afin de déterminer l'expression explicite de (U_n) ainsi que sa nature.

CORRIGÉS

5. Corrigés

Exercice 1 : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \dfrac{9}{6 - U_n}, \quad U_0 = 1.$

1. $U_1 = \dfrac{9}{6 - U_0} = \dfrac{9}{5}, \qquad U_2 = \dfrac{9}{6 - U_1} = \dfrac{9}{6 - \frac{9}{5}} = \dfrac{9 \times 5}{21} = \dfrac{15}{7}.$

   $U_1 - U_0 = \dfrac{4}{5}$ et $U_2 - U_1 = \dfrac{15}{7} - \dfrac{9}{5} = \dfrac{75 - 63}{35} = \dfrac{12}{35} \neq \dfrac{4}{5}.$

   Il n'existe pas de réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout entier n, (U_n) n'est pas arithmétique.

   $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{9}{5}$ et $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\frac{15}{7}}{\frac{9}{5}} = \dfrac{15 \times 5}{7 \times 9} = \dfrac{25}{21} \neq \dfrac{9}{5}.$

   Il n'existe pas de réel q tel que $U_{n+1} = qU_n$ pour tout entier n, (U_n) n'est pas géométrique.

Rappelez-vous : Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique ou n'est pas géométrique, il suffit de montrer que la suite ne vérifie pas la relation de récurrence avec trois termes consécutifs. Travailler avec des nombres est donc possible et même indiqué.
Pour prouver qu'une suite est arithmétique ou géométrique, on a obligation de travailler avec la variable n.

2. $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$, montrons que (V_n) est arithmétique.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} - 3} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6 - U_n} - 3} - \frac{1}{U_n - 3}$$

$$= \frac{6 - U_n}{9 - 3(6 - U_n)} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n}{3U_n - 9} - \frac{1}{U_n - 3}$$

$$= \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3 - U_n}{3(U_n - 3)} = \frac{-(U_n - 3)}{3(U_n - 3)} = -\frac{1}{3}.$$

$$\boxed{(V_n) \text{ est arithmétique de raison } -\frac{1}{3} \text{ et de premier terme } V_0 = -\frac{1}{2}.}$$

3. D'après le cours sur les suites arithmétiques :

$$V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{3 + 2n}{6}.$$

$V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ donc $U_n - 3 = \dfrac{1}{V_n}$ nous donne $U_n = \dfrac{1}{V_n} + 3$,

$$\boxed{U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = -\frac{6}{3 + 2n} + 3 = \frac{3 + 6n}{3 + 2n}}.$$

4. D'après la table de la suite, on peut conjecturer que (U_n) converge vers 3.

<u>Remarque :</u> *Le terme initial n'entre en compte que dans l'expression explicite, pas dans la définition de la suite (V_n) ni dans sa nature.*

<u>2e version :</u> *Si vous avez travaillé la récurrence...*

Pour tour entier n, notons $P(n)$ la proposition « $U_n = \dfrac{3 + 6n}{3 + 2n}$ ».

Pour $n = 0$, on a $\dfrac{3 + 6n}{3 + 2n} = \dfrac{3 + 0}{3 + 0} = 1 = U_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Supposons que pour un entier k, $P(k)$ soit vraie et montrons qu'alors, $P(k + 1)$ est vraie.

Si $P(k)$ est vraie, alors $U_k = \dfrac{3 + 6k}{3 + 2k}$ et

$$U_{k+1} = \frac{9}{6 - U_k} = \frac{9}{6 - \dfrac{3 + 6k}{3 + 2k}} = \frac{9(3 + 2k)}{6(3 + 2k) - (3 + 6k)} = \frac{27 + 18k}{18 + 12k - 3 - 6k}$$

$$= \frac{9 + 18k + 18}{15 + 6k} = \frac{9 + 18(k + 1)}{9 + 6(k + 1)} = \frac{3(3 + 6(k + 1))}{3(3 + 2(k + 1))} = \frac{3 + 6(k + 1)}{3 + 2(k + 1)}.$$

$P(k + 1)$ est donc vraie.

On a montré par récurrence que pour tout entier n, $\boxed{U_n = \dfrac{3 + 6n}{3 + 2n}}$.