Terminale

Contrôle continu

Résumés de cours | Exercices | Contrôles | Corrigés

Maths

Enseignement commun STHR, STI2D, STL, STMG et ST2S

Résumés de cours, exercices et contrôles corrigés

NOUVEAUX PROGRAMMES !

Tle Techno

ellipses

1 Suites numériques

1. Suites arithmétiques

Moyenne arithmétique

Tout d'abord, un rappel de la classe de première concernant la définition d'une suite arithmétique.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si, à partir de son 1[er] terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison de la suite arithmétique (u_n) et est noté r.

Alors, il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que pour tout entier naturel n la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (donc indépendante de n). Cette constante sera alors la raison de la suite

Définition

La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est le nombre $\frac{a+b}{2}$.

Propriété

Soit a, b et c trois nombres tels que $a < b < c$.

a, b et c sont trois termes d'une suite arithmétique si, et seulement si b est la moyenne arithmétique des nombres a et c.

Expression de u_n en fonction de n

Propriétés

(i) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_0.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

(ii) Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^{er} terme u_p et de raison r.

Alors, on a pour tous entiers p et n tels que $0 \leq p \leq n$, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Somme d'une suite arithmétique

Propriété

La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque

C'est la somme des n termes de la suite arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme 1.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_0.

On a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

Remarques

1) On retient cette formule sous la forme suivante (plus facile à retenir !) :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

2) Si cela concerne une suite (u_n) arithmétique de raison r et de 1^{er} terme u_p, alors :

$$u_p + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

2. Suites géométriques

Moyenne géométrique

Tout d'abord, un rappel de la classe de première concernant la définition d'une suite géométrique.

Définition

On dit que (u_n) est géométrique si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.

Alors, il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) : il est égal au quotient entre deux termes consécutifs différents de 0 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de prouver que pour tout entier n le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Définition

La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est le nombre $\sqrt{ab}$.

Propriété

Soit a, b et c trois nombres positifs tels que $a < b < c$.

a, b et c sont trois termes d'une suite géométrique si, et seulement si b est la moyenne géométrique des nombres a et c.

Expression de u_n en fonction de n

Propriétés

(i) Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 \times q^n$.

(ii) Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_p et de raison q.

Alors, on a pour tous entiers p et n tels que $0 \leq p \leq n$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Somme d'une suite géométrique

Propriété

La somme des premières puissances d'un nombre réel $q \neq 1$ est :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarque

C'est la somme des $n + 1$ termes de la suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme 1.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison $q \neq 1$.

On a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$

Remarques

1) On retient cette formule sous la forme suivante (plus facile à retenir !) :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1^{\text{terme}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

2) Si cela concerne une suite (u_n) géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_p,

alors : $u_p + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$

Énoncés des exercices

* Exercice 1 — 15 min

Dire dans chacun des cas, si les quatre premiers nombres sont les 1[er] termes d'une suite arithmétique. Si c'est le cas, préciser la raison.

1. 8 ; 20 ; 32 ; 44.

2. – 5 ; – 10,5 ; – 16 ; – 20,5.

3. 15 ; 30 ; 45 ; 50.

4. – 2,5 ; – 5 ; – 7,5 ; – 10.

** Exercice 2 — 35 min

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1[er] terme $u_0 = -2$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}$.

1. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser sa raison.

2. Calculer u_1, u_2 et u_3 en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

3. a. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

b. Calculer u_{26} et u_{100}.

c. Résoudre dans $\mathbb{N}$, $u_n = -13$.

4. a. Déterminer $S = u_0 + u_2 + \ldots + u_{15} = \displaystyle\sum_{k=0}^{15} u_k$.

b. Déterminer $T = u_{16} + u_{17} + \ldots + u_{46} = \displaystyle\sum_{k=16}^{46} u_k$.

c. En déduire, sans utiliser la formule de somme d'une suite arithmétique, $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{46} u_k$.

* Exercice 3 — 20 min

Soit (u_n) une suite arithmétique dont on connaît les trois termes suivants :

$u_1 = 2,5$, $u_3 = 7,5$ et $u_5 = 12,5$.

1. Calculer u_2 et u_4.

2. Déterminer la raison r de la suite arithmétique (u_n).

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction n puis calculer u_{150}.

4. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage Python :

```
def f(n) :
    u=2.5
    s=u
    for k in range(1,n+1) :
        u=u+2.5
        s=s+u
    return s
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

k	/////////////	1	2	3
u	2.5	…	…	…
s	2.5	…	…	…

b. Que retourne l'algorithme pour la valeur de f(100) ?

Exercices

** Exercice 4

15 min

Soit (v_n) une suite arithmétique dont on connaît les deux termes suivants :

$v_{25} = 50$ et $v_{30} = 80$.

Déterminer sa raison r et son 1^{er} terme v_0.

** Exercice 5

20 min

Lors de la culture dans le milieu naturel, une population composée initialement de 10 000 bactéries augmente de 5 000 bactéries toutes les heures.

On note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Donner la nature de la suite (u_n) en précisant bien tous ses éléments caractéristiques.

2. Recopier et compléter le programme ci-dessous, en langage Python, qui renvoie la valeur u_n pour un entier n choisi au départ.

```
def u(n) :
    u=…
    for k in range(…) :
        u=…
    return u
```

3. Déterminer le nombre de bactéries de cette population au bout de 5 heures.

4. Au bout de combien de temps la population dépassera le nombre de 50 000 bactéries ?

* Exercice 6 — 15 min

Dire dans chacun des cas, si les quatre premiers nombres sont les 1er termes d'une suite géométrique. Si c'est le cas, préciser la raison.

1. $31 ; 62 ; 124 ; 248$.
2. $-4{,}5 ; -9 ; -18 ; 36$.
3. $25 ; 100 ; 400 ; 1\,600$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; 1 ; \sqrt{2} ; 2$.

** Exercice 7 — 35 min

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme $u_0 = \dfrac{1}{10}$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

1. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser sa raison.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3 en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
3. a. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   b. Calculer u_{10} et u_{20}.
   c. Résoudre dans $\mathbb{N}$, $u_n = 1{,}6$.
4. a. Déterminer $S = u_0 + u_2 + \ldots + u_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k$.
   b. Déterminer $T = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{20} = \displaystyle\sum_{k=10}^{20} u_k$.
   c. En déduire, sans utiliser la formule de somme d'une suite géométrique, $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$.

* Exercice 8 — 20 min

Soit (u_n) une suite géométrique dont on connaît les trois termes suivants :

$u_1 = 10$, $u_3 = 2{,}5$ et $u_5 = 0{,}625$.

1. Calculer u_2 et u_4.
2. Déterminer la raison q de la suite géométrique (u_n).
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction n puis calculer u_9.

4. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage Python :

```
def f(n) :
    u=2.5
    s=u
    for k in range(1,n+1) :
        u=u+2.5
        s=s+u
    return s
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

k	/////////////	1	2	3
u	10	…	…	…
s	10	…	…	…

b. Que retourne l'algorithme pour la valeur de f(8) ?

Exercices

** Exercice 9 — 15 min

Soit (v_n) une suite géométrique dont on connaît les deux termes suivants :

$v_{10} = 240$ et $v_8 = 60$.

Déterminer sa raison q en supposant qu'elle est **positive** et son 1er terme v_0.

** Exercice 10 — 35 min

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=0}^{10} 3i$.
2. $\sum_{i=3}^{20} 2 - \frac{1}{2}i$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k - 1$.
4. $\sum_{i=1}^{5} i^2$.
5. $\sum_{j=1}^{4} j^3$.
6. $\sum_{k=0}^{15} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
7. $\sum_{k=2}^{n} 5 \times (-4)^k$.

** Exercice 11 — 30 min

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.

On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.

On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours.