2de

Nicolas Nguyen
Stéphane Daniel
Luc Ponsonnet
Emmanuel Schneider

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Résumé de cours
- Démonstrations
- Approfondissements, algorithmes
- Méthodes
- Vrai/Faux
- Exercices avec indications
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

Chapitre 1

Nombres et calculs algébriques

Dans l'Antiquité grecque, la vision des nombres était géométrique et non linéaire, comme aujourd'hui. Ainsi, 4 et 9 étaient représentés par des carrés et 3, 6 ou 10 par des triangles. Il faut attendre la Renaissance pour placer les nombres sur un axe, en intercalant, par exemple, $\sqrt{2}$ entre 1 et 2 ou π entre 3 et 4. La définition formelle des nombres réels ne date que de la fin du XIX^{e} siècle.

Un mathématicien

L'astronome et mathématicien indien **Brahmagupta** (598-env. 660) a développé des méthodes très sophistiquées en arithmétique. C'est dans ses écrits que l'on rencontre pour la première fois l'usage du zéro et de nombres négatifs et il manie les racines carrées avec habileté. Il résout des équations du premier et même du second degré. C'est à son époque que l'on voit apparaître la numération de position en base 10 mais il ne semble pas en être l'initiateur.

LE SAVIEZ-VOUS ?

La numération de position, inventée par les Indiens vers le VI^{e} siècle puis généralisée par les Arabes, s'introduit lentement en Occident à la fin du Moyen Âge ; elle permet d'élaborer des algorithmes pour les opérations simples. Les notions de fraction et de développement décimal apparaissent au XVI^{e} siècle.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Les nombres réels
  - les placer sur un axe gradué
  - les ranger dans un intervalle
  - de sous-ensembles typiques de $\mathbb{R}$
  - approcher des nombres réels par des nombres décimaux
- La valeur absolue
  - définition
  - interprétation géométrique
- Effectuer des calculs
  - développer et factoriser
  - réduire des quotients
  - manipuler des puissances et des racines carrées
  - calculer avec des inégalités
- Démontrer
  - $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal
  - l'irrationalité de $\sqrt{2}$
  - $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$
  - interprétation graphique de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

et plus si affinités

- Développer d'autres identités remarquables
  - $(a+b)^3$
  - $(a+b+c)^2$
- Programmer
  - obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ à l'aide d'un algorithme
  - programmer un algorithme de seuil

Résumé de cours

Les nombres réels

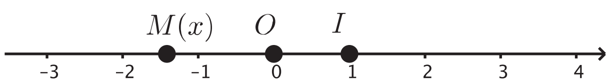
La droite numérique

On considère une droite munie de deux points distincts O et I tels que le couple $(O\ ;\ I)$ constitue un **repère de cette droite**, cette droite est appelée **axe gradué**. O est l'**origine du repère**, la distance OI est égale à une **unité de longueur**, c'est la **graduation** unité sur l'axe (OI).

Définition :

• *On appelle **ensemble des nombres réels positifs**, noté $\mathbb{R}^+$, l'ensemble de tous les nombres (positifs) permettant de mesurer la distance OM entre l'origine et un point M de l'axe gradué. On appelle **ensemble des nombres réels négatifs**, noté $\mathbb{R}^-$, l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-x \in \mathbb{R}^+$. L'**ensemble des nombres réels** ou **ensemble des réels**, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des nombres appartenant à $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$.*

• *On considère un point M de l'axe (OI) : si $M \in [OI)$, notons x le nombre réel positif tel que $OM = x$; si $M \notin [OI)$, notons y le nombre réel positif tel que $OM = y$ et posons $x = -y$ alors x est négatif. Dans tous les cas, le nombre réel x repère le point M sur l'axe gradué (OI) muni du repère $(O;I)$, x est l'**abscisse** du point M. Inversement, à tout réel x correspond un unique point sur l'axe gradué, appelé **image** de x et noté $M(x)$.*



Les ensembles de nombres usuels

Définition :

• *L'**ensemble des entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots.\}$.*

• *L'**ensemble des entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres x et $-x$, où $x \in \mathbb{N}$.*

• *L'**ensemble des nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

• *L'**ensemble des nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des **fractions**, de la forme $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Un nombre réel est **irrationnel** s'il n'est pas rationnel.*

Vocabulaire : *on dit que $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si 1 est l'unique diviseur positif commun de a et b.*

Théorème 1.1.— Toute fraction non nulle est égale à une unique fraction irréductible.

Notation : *E et F étant deux ensembles, on dit que E est **inclus** dans F, et on écrit $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F.*

Remarque : avec cette notation, on a écrire la chaîne d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
$\mathbb{N}^\star$, $\mathbb{Z}^\star$, $\mathbb{D}^\star$, $\mathbb{Q}^\star$ et $\mathbb{R}^\star$ sont les ensembles définis plus haut, privés de 0.

Les intervalles

Définition : *Soit a et b deux nombres réels, tels que $a < b$.*

• *On dit qu'un nombre réel x est **encadré** par les réels a et b, si on peut écrire l'une des doubles inégalités suivantes : $a \leqslant x \leqslant b$, $a < x < b$, $a \leqslant x < b$ ou $a < x \leqslant b$. Chacune de ces doubles inégalités constitue un **encadrement** de x.*

• *Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels x défini par une des inégalités : $x \leqslant a$, $x < a$, $x \geqslant a$, $x > a$, ou bien un des encadrements ci-dessus.*

Notation : *Un intervalle se note avec des crochets dont l'orientation dépend de l'appartenance ou non de la borne à l'ensemble considéré. Par exemple l'ensemble des réels x vérifiant $x < 5$ est l'intervalle ouvert $]-\infty\ ;\ 5[$, ou encore, l'ensemble des réels x vérifiant $-2 \leqslant x < 5$ est l'intervalle semi-ouvert à droite (ou semi-fermé à gauche) $[-2\ ;\ 5[$.*
*$-\infty$ (resp. $+\infty$) se lit **moins l'infini** (resp. **plus l'infini**) et désigne une potentialité plus petite (resp. plus grande) que n'importe quel nombre réel.*

Notation : $]-\infty\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}$, $]-\infty\ ;\ 0] = \mathbb{R}^-$, $[0\ ;\ +\infty[= \mathbb{R}^+$, $]-\infty\ ;\ 0[= \mathbb{R}^{-\star}$ *et* $]0\ ;+\infty[= \mathbb{R}^{+\star}$.

Théorème 1.2.— Soit x un nombre réel, il existe un nombre décimal d et un entier naturel n tels que $d \leqslant x < d + 10^{-n}$.

Définition : *L'encadrement défini précédemment est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**. L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres d et $d + 10^{-n}$ qui est le plus proche de x, s'il existe. Sinon x est à égale distance de d et $d + 10^{-n}$, alors par convention $d + 10^{-n}$ est l'arrondi cherché.*

Remarque : 10^{-n} est l'amplitude de l'intervalle $[d\ ;\ d + 10^{-n}[$.

Valeur absolue d'un nombre réel

Définition : *Étant donné un nombre réel x, on appelle **valeur absolue** de x, le nombre réel noté $|x|$, tel que* $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarque : pour tous nombres réels x, $|x| \geqslant 0$.

Théorème 1.3.— Étant donné deux nombres réels x et y, la **distance** entre x et y est le nombre $|x - y|$.

Théorème 1.4.— Soit a et r deux nombres réels avec $r > 0$, x appartient à l'intervalle $[a-r\ ;\ a+r]$ si, et seulement si, $|x - a| \leqslant r$.

Définition : *Avec les notations du théorème précédent, on dit que x est une **valeur approchée** (ou encore une **approximation**) de a à r près.*

■ Calcul littéral

Définition : • *Une **expression littérale** est une liste de nombres et de lettres liés entre eux par des opérations algébriques ou des fonctions. Les lettres sont appelées **variables**.*

• ***Développer une expression littérale** c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes. **Factoriser une expression littérale** c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs.*

Proposition 1.5.— Soit a, b, c et d quatre nombres réels.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Remarque : le passage du membre de gauche au membre de droite est un développement et le passage du membre de droite à celui de gauche est une factorisation.

Théorème 1.6.— Identités remarquables —. Soit a et b deux nombres réels, on a :

$$\boxed{\bullet\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \bullet\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \bullet\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Les quotients

Théorème 1.7.— Soit a, b, c et d quatre nombres réels, avec b et d non nuls :

- $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$;
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$;
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d + b \times c}{b \times d}$;
- si de plus $c \neq 0$, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$.

Les puissances entières et la racine carrée

Définition : *Soit a un nombre réel non nul, et n un entier relatif.*

- *Si $n > 0$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois le nombre } a}$.*
- *Si $n < 0$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.*
- *$a^0 = 1$.*

Théorème 1.8.— Soit a et b deux nombres réels non nuls, et soit m et n deux entiers relatifs.

- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $(ab)^n = a^n b^n$;
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Définition : *Soit a un nombre réel positif, on appelle* ***racine carrée*** *de a le seul nombre positif x tel que $x^2 = a$, et on la note $\sqrt{a}$.*

Théorème 1.9.— Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- Si a est un nombre réel quelconque $\sqrt{a^2} = |a|$.

Inégalités et opérations

Théorème 1.10.— Soit a, b, c et d des nombres réels.

- $(a < b \neq 0) \Longrightarrow (a + c < b + c)$
- $(a < b \text{ et } c \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ac < bc \text{ et } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{si } c > 0 \\ ac > bc \text{ et } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{si } c < 0 \end{cases}$
- $(a < b \text{ et } c < d) \Longrightarrow (a + c < b + d)$
- $(0 \leqslant a < b \text{ et } 0 \leqslant c < d) \Longrightarrow ac < bd$

Remarque : dans ce théorème, on peut remplacer $<$ par $>$, $\leqslant$ ou encore $\geqslant$.

Démonstrations

Identités remarquables

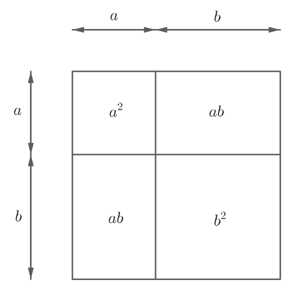
Théorème 1.6.— Identités remarquables —. Soit a et b deux nombres réels, on a :

$\boxed{\bullet\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \bullet\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \bullet\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Démonstration ▽

• Montrons que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Ce résultat est une conséquence immédiate de la **proposition 1.5** avec $c = a$ et $d = b$:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$



L'objectif ici est d'illustrer graphiquement cette identité avec $a > 0$ et $b > 0$. Ci-contre, on considère un carré de côté de longueur $a+b$, puis on le décompose en rectangles comme sur la figure. Les nombres affichés dans ces rectangles sont leurs aires. L'aire du grand carré est $(a+b)^2$, mais aussi $a^2 + b^2 + ab + ab$, puisqu'il s'agit de la même aire, ces deux expressions sont égales.

• Montrons que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Pour cela, appliquons le résultat précédent au couple $(a, -b)$ à la place de (a, b). Il vient :

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rappelons que $(-b)^2 = (-b)\times(-b) = b\times b = b^2$.
• Montrons finalement que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Observons que $(a+b)(a-b) = (a+b)(a+(-b))$ et appliquons à nouveau la **proposition 1.5**.

$$(a+b)(a-b) = a\times a + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

▲

Racines carrées

Théorème 1.9.— Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.
• $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; • Si a est un nombre réel quelconque $\sqrt{a^2} = |a|$.

Démonstration ▽
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.
• Montrons que $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$. Par définition, $\sqrt{a\times b}$ est la solution positive de l'équation :

$$x^2 = ab \qquad \text{(E)}$$

Or, d'après les règles de calcul avec les puissances (**théorème 1.8**), $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2 = ab$, donc $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est une solution positive de l'équation (E). Finalement, par unicité de la solution positive de l'équation (E), $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

• Montrons que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Pour ce faire, on applique le résultat précédent au couple $(\frac{a}{b}, b)$. Il vient :

$$\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{b} \times b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{b}$$

En divisant les deux membres aux extrêmités de cette égalité par le nombre strictement positif $\sqrt{b}$, il vient :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

• Montrons que $\sqrt{a^2} = |a|$. La preuve sera par disjonction de cas (cf **Annexe**). Par définition, $\sqrt{a^2}$ est le nombre positif qui élevé au carré donne a^2.

- Si $a \geqslant 0$, ce nombre est a lui-même.
- Si $a < 0$, alors $-a$ est un nombre positif et $(-a)^2 = a^2$. Par conséquent, $\sqrt{a^2} = -a$.
- Dans tous les cas, $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$, nous retrouvons ici la définition de $|a|$, l'égalité est démontrée. ▲

Théorème 1.11.— Si a et b sont deux nombres réels strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration ▽

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, démontrer le théorème revient à comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, pour ce faire nous allons étudier le signe de la différence $A = \sqrt{a+b} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Afin de supprimer le maximum de racines carrées, nous allons modifier l'écriture de A en utilisant son *expression conjuguée* comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left[\sqrt{a+b} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\right]\left[\sqrt{a+b} + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\right]}{\sqrt{a+b} + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{a+b}^2 - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + b - (a + 2\sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}} \end{aligned}$$

Le numérateur du dernier quotient est strictement négatif et le dénominateur strictement positif, donc $A < 0$. En conséquence $\sqrt{a+b} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) < 0$, reste à ajouter $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ des deux côtés de l'inégalité, on obtient alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. ▲

Définition : *Soit a et b deux nombres réels, ou expressions algébriques, on dit que $a + b$ et $a - b$ sont des **expressions conjuguées** l'une de l'autre.*

Nombres décimaux

Théorème 1.12.— $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration ▽

Raisonnons par l'absurde (on pourra se référer à l'**Annexe**) et supposons au contraire que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors deux entiers naturels a et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, soit $a = \frac{10^n}{3}$. En particulier ceci entraîne que 3 divise 10^n. Pourtant, la somme des chiffres de 10^n est 1 qui n'est pas divisible par 3. Ceci contredit le critère de divisibilité par 3, qui stipule que lorsqu'un nombre est divisible par 3, la somme de ses chiffres l'est également. Conclusion, l'hypothèse de départ est fausse, autrement dit $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. ▲

Approfondissements, algorithmes

Quelques propriétés numériques ou algébriques

Proposition 1.13.— Soit a, b et c des nombres réels, alors :
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$.

Démonstration ▽

Soit a, b et c des nombres réels.
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b+c)^2 = [a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$
$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$.

▲

Théorème 1.14.— Inégalité arithmético-géométrique
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, alors $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Démonstration ▽

Pour comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$, nous mettons en œuvre la **méthode 1.10**) qui consiste simplement à étudier le signe de leur différence.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Or $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqslant 0$ avec égalité exclusivement si $a=b$, on en déduit donc que $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0$ et finalement $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

▲

Algorithmes

Détermination par balayage d'un encadrement de $\sqrt{2}$

Par définition, on sait que $\sqrt{2}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = 2$. Comme $1 < 2 < 4$, soit

$$1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2$$

il en résulte que $\sqrt{2}$ est un nombre réel strictement compris entre 1 et 2. Ce n'est donc pas un nombre entier, ni même un nombre rationnel comme nous le démontrerons au prochain chapitre.

En revanche, comme tout nombre réel, $\sqrt{2}$ – d'après le **théorème 1.2** – peut être approché par des nombres décimaux avec une précision arbitraire, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut.

Le principe de la recherche d'une approximation de $\sqrt{2}$ par balayage est le suivant.
- Tout d'abord on se donne le nombre de décimales exactes n (où $n \in \mathbb{N}^\star$) attendu.
- On balaie l'intervalle $[1 \; ; \; 2]$ avec un pas de 10^{-n}, et on calcule à chaque étape la distance $\left|\left(1+\frac{k}{10^n}\right)^2 - 2\right|$, entre 2 et $\left(1+\frac{k}{10^n}\right)^2$ où k est un entier naturel inférieur ou égal à 10^n.
- L'approximation $1+\frac{k}{10^n}$, de $\sqrt{2}$, est obtenue pour la plus petite distance calculée précédemment.

En langage Python, nous obtenons le programme suivant :